Vocabulaire des applications : injectivité, surjectivité et bijectivité

Si E et F sont des ensembles quelconques, une application $[f : E \to F]$ est un "lien" entre ces ensembles.

A chaque élément x de E, elle associe un et un seul élément y de F. On note alors $y = f(x)$
On dit que y est l'image de x par l'application f. On dit aussi que x est un antécédent de y par l'application f.
Contre-exemples :

Ici, E et F sont des ensembles quelconques...Ils ne sont pas nécessairement constitués des mêmes objets. Par exemples :

-si $E = \mathbb{Z}$ et $F = \{rouge, orange, vert\}$ alors on peut définir une application f par : $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(k) = \begin{cases} \text{orange} & \text{si } k = 0 \\ \text{vert} & \text{si } k \neq 0 \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{rouge} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

-si Δ est une droite du plan, la symétrie s_Δ d'axe Δ définit une application du plan dans lui même

-si E est l'ensemble des élèves de $PTSI$ et $F = \mathbb{N}$ on peut construire une application G qui à un élève lui associe son groupe de khôlle

Lorque E et F sont des ensembles de nombres, on préfère en général le terme de "fonction" au lieu d' "application" et le vocabulaire précédent (notion d'image,d'antécédent) a été introduit et étudié dans le secondaire. On ne fait donc que généraliser la notion de fonction.

DÉFINITIONS **Injectivité, surjectivité et bijectivité**

Soit $[f : E \to F]$ une application entre des ensembles quelconques E et F, on dira que

(Surjectivité) f est surjective lorsque : $\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x)$

c'est à dire que : Chaque élément de F possède au moins un antécédent par l'application f

ou encore que : Pour y fixé dans F, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution dans E

(Injectivité) f est injective lorsque : $\forall (x, x') \in E \times E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

c'est à dire que : Deux éléments distincts de E ne peuvent avoir la même image par l'application f

ou encore que : Pour y fixé dans F, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution dans E

(Bijectivité) f est bijective lorsqu'elle est injective et surjective et alors : $\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x)$

c'est à dire que : Chaque élément de F possède un unique antécédent par l'application f

ou encore que : Pour y fixé dans F, l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution dans E

Lorsque f est bijective de E dans F, l'unique antécédent dans E de l'élément y de F se note $f^{-1}(y)$.
On a donc, par définition, $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ et $f^{-1}\big(f(y)\big) = y$

On peut ainsi définir une application dite application réciproque de $f$et qu'on note f^{-1}
qui associe à chaque élément y de F son unique antécédent par f soit : $\left[\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array}\right]$