Les fonctions usuelles du secondaire

Propositions **Régularité des fonctions de référence**

	sont continues	et dérivables
Les fonctions polynômiales		
Les fonctions rationnelles		
Les fonctions sinus et cosinus $\cos$ et $\sin$		
La fonction exponentielle $\exp$		
La fonction logarithme $\ln$		
La fonction racine carré		
La fonction valeur absolue		

• *Problèmes de dérivabilité* Exemples de référence du secondaire :

Propositions **Propriétés associées à ln et exp**

• $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall n \in \mathbb{Z},$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ $\ln(x^n) = n \ln x$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{Z},$ $e^{x+y} = e^x e^y$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $(e^x)^n = e^{nx}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

• *Résultat dit de croissances comparées*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$

Les fonctions tangente $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ **_et_** **_cotangente_** $\boldsymbol{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$

- Domaine de définition/Domaine d'étude

- Régularité : continuité, dérivabilité et calcul de la dérivée

- Variations de la fonctions

- Tangentes particulières et limites

- Allure de la courbe représentative

Les fonctions trigonométriques ou circulaires directes

PROPOSITIONS ***Propriétés des fonctions circulaires directes***

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

- $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $\forall x \in \underbrace{\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}}_{\mathbb{R} - \left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$, $\text{cotan } x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

  $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, *(formule d'addition)*
  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$;

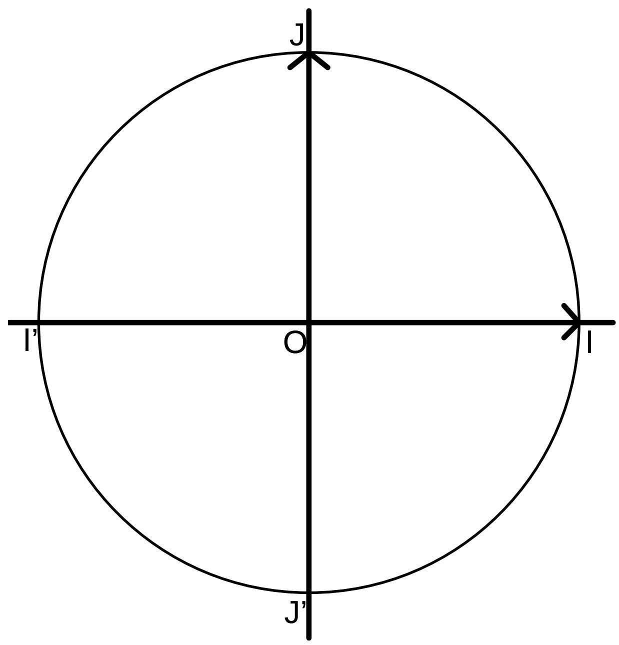
  (lorsque cela a un sens) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ en particulier $\tan(2a) = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

- $\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2$ *(formule de factorisation)*
  $\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$

  $\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

Lignes trigonométriques fondamentales

Mesure de x en °	0	30	45	60	90	180
Mesure de x en *rad*						
cos x						
sin x						



D'autres formules de trigonométrie

1) Pour tout x réel, on a :

$\cos(\pi - x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\sin(\pi - x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Pour tout x réel, on a :

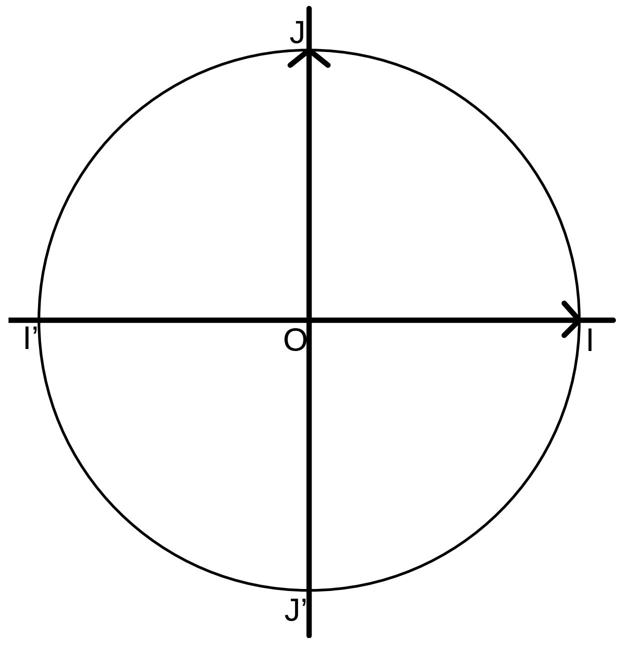
$\cos(\pi + x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\sin(\pi + x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

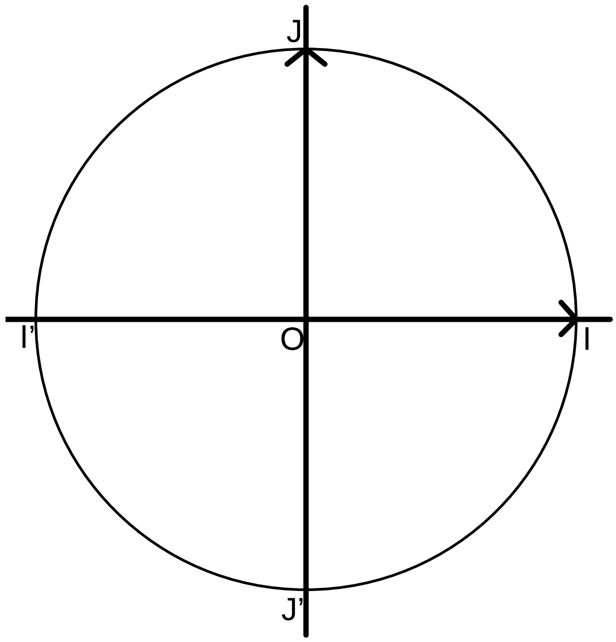
3) Pour tout x réel, on a :

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1) Pour tout x réel, on a :

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$





Équations $\cos x = \cos a$

- L'équation $\cos x = \cos a$ d'inconnue x admet pour solutions les nombres réels pouvant s'écrire :

  On a donc l'équivalence :

- En particulier, lorsque $\cos a = 1$ alors

- Et dans le cas où $\cos a = -1$ alors

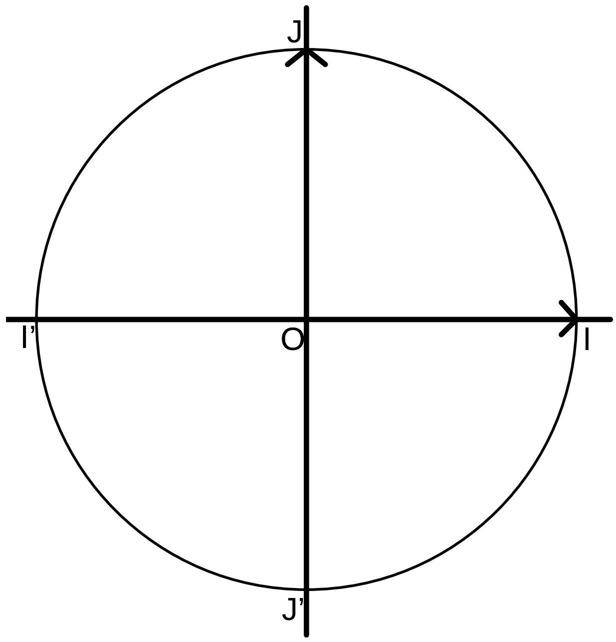
Équations $\sin x = \sin a$

- L'équation $\sin x = \sin a$ d'inconnue x admet pour solutions les nombres réels pouvant s'écrire :

  On a donc l'équivalence :

- En particulier, lorsque $\sin a = 1$ alors

- Et dans le cas où $\sin a = -1$ alors



Équations $\tan x = \tan a$ ***où*** $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

L'équation $\tan x = \tan a$ d'inconnue x admet pour solutions les nombres réels pouvant s'écrire :

Point méthode — ***Résoudre une équation trigonométrique***

- Penser à utiliser les formules de trigonométrie pour se ramener à une équation trigonométrique de référence
- Pour transformer une expression en « $a \sin x + b \cos x$ » en « $R \cos(x + \varphi)$ » ou « $R \sin(x + \varphi)$ » utiliser la méthode de Fresnel : si $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ alors $a \sin x + b \cos x = R\left(\frac{a}{R} \sin x + \frac{b}{R} \cos x\right)$

  et interpréter les réels $\frac{a}{R}$ et $\frac{b}{R}$ comme un cosinus ou un sinus connus. (On montrera que c'est toujours possible !)