Propriétés de symétries des fonctions et intégrales

Parité et imparité

On se donne une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et $T > 0$.

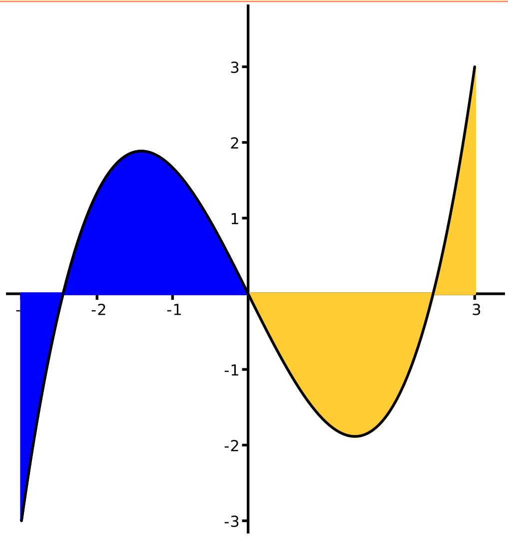
• Si f est une fonction impaire : $\boxed{\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0}$

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{T} f(x)\,dx}_{=I} + \underbrace{\int_{-T}^{0} f(x)\,dx}_{=J} \qquad \text{Si on pose} \quad u = -x \quad \text{dans } J : \begin{cases} x = -T \ \Rightarrow \ u = T \\ x = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \\ du = -dx \end{cases}$$

aussi $\displaystyle J = \int_{-T}^{0} f(x)\,dx = \int_{T}^{0} f(-u) \times -1\,du = \int_{0}^{T} f(-u)\,du = -\int_{0}^{T} f(u)\,du = -I$ puisque f est impaire

et donc $\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = I + J = 0$

Graphiquement, la fonction étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine aussi l'aire algébrique sous la courbe entre $-T$ et T est nulle et cette aire représente par définition l'intégrale $\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$ est nulle.



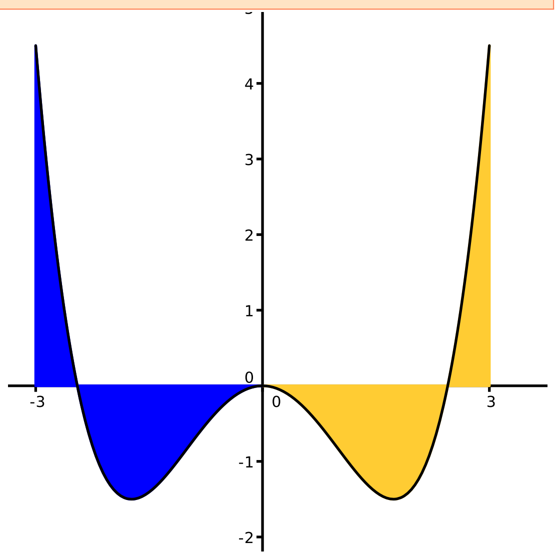
• Si f est une fonction paire : $\boxed{\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{T} f(x)\,dx}$

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{T} f(x)\,dx}_{=I} + \underbrace{\int_{-T}^{0} f(x)\,dx}_{=J} \qquad \text{Si on pose} \quad u = -x \quad \text{dans } J : \begin{cases} x = -T \ \Rightarrow \ u = T \\ x = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \\ du = -dx \end{cases}$$

aussi $\displaystyle J = \int_{-T}^{0} f(x)\,dx = \int_{T}^{0} f(-u) \times -1\,du = \int_{0}^{T} f(-u)\,du = \int_{0}^{T} f(u)\,du = I$ puisque f est paire

et donc $\displaystyle\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = I + J = 2I = 2\int_{0}^{T} f(x)\,dx$

Graphiquement, la fonction étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée aussi l'aire algébrique sous la courbe entre $-T$ et T, qui représente l'intégrale $\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$ vaut le double de celle entre 0 et T qui représente $\int_{0}^{T} f(x)\,dx$



Périodicité

On se donne une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et $T > 0$ et on suppose que f est T périodique.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel,} \quad \int_x^{x+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt}$$

autrement dit l'intégrale de f est la même sur tout intervalle ayant pour longueur la période T

On introduit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. On sait que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

Aussi : $\quad G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt = \int_0^{x+T} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt = F(x+T) - F(x) = F \circ u(x) - F(x) \quad$ où $\quad [u : x \mapsto x + T]$

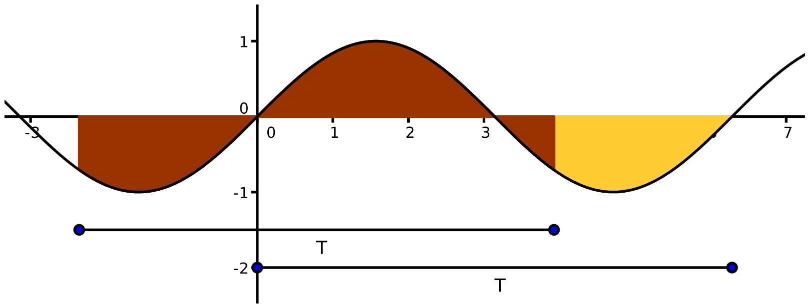
Or, F étant une primitive de f sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $F' = f$.

De ce fait, par composition, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = u'(x) \times F'\big(u(x)\big) - F'(x) = 1 \times f\big(u(x)\big) - f(x) = f(x+T) - f(x) = 0 \quad$ puisque f est T périodique

La fonction G est donc constante sur $\mathbb{R}$: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = G(0) \quad$ soit $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt$

Graphiquement, l'aire sous la courbe sur une période ne varie pas.



$$\boxed{\text{Pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a \leqslant b, \text{ on a : } \quad \int_{a+T}^{b+T} f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt}$$

On réalise le changement de variable $\quad u = t - T \quad$ alors $\quad \begin{cases} t = a + T \ \Rightarrow \ u = a \\ t = b + T \Rightarrow \ u = b \\ du = dt \end{cases}$

Alors : $\quad \int_{a+T}^{b+T} f(t)\, dt = \int_a^b f(u+T)\, du = \int_a^b f(u)\, du \quad$ puisque f est périodique

La variable u étant une variable muette, on peut la substituer par la variable libre t et donc : $\quad \int_{a+T}^{b+T} f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$

Graphiquement, l'aire d'une portion sous la courbe ne varie pas si on la décale d'une période.