Complément pour la physique

La plupart des fonctions issues des problèmes de la Physique ou de la Mécanique dépendent de plusieurs paramètres. On parle alors de fonctions de plusieurs variables. On se limitera cette année aux fonctions à 2 ou 3 variables.

Définition — ***Applications et dérivées partielles***

Si $\left[f : (x,y) \mapsto f(x,y)\right]$ est une fonction définie sur une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$ et si $a_0 = (x_0, y_0)$ est un point de $\mathcal{U}$ (resp. $\left[f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)\right]$ définie sur une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ et $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$)

on définit les applications partielles (qui sont des fonctions d'une variable) associées à f au point a_0

$$\left[f(x_0, .) : t \mapsto f(x_0, t)\right] \quad \text{et} \quad \left[f(., y_0) : t \mapsto f(t, y_0)\right]$$

(On ne fait varier qu'un seul paramètre, les autres paramètres sont constants)

et les dérivées partielles de f au point a_0 lorsqu'elles existent comme les dérivées de ses applications partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(f(.,y)\big)'(x) \quad \text{qui n'existe que si la fonction } f(.,y) \text{ est dérivable en } x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \big(f(x,.)\big)'(y) \quad \text{qui n'existe que si la fonction } f(x,.) \text{ est dérivable en } y$$

On peut aussi définir (lorsque c'est possible) des dérivées partielles secondes en dérivant partiellement ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x,y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x,y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x,y)$$

Exemple : La fonction $\left[g : (x,y) \mapsto \dfrac{x+y^2}{xy}\right]$ est définie sur $\mathcal{U} =$

Ses applications partielles en $a_0 = (1,2)$ sont

Ses dérivées partielles premières sont :

Ses dérivées partielles secondes sont :

Applications aux calculs d'incertitude en physique

En maths : Si $\left[f : x \mapsto f(x)\right]$ est une fonction continue sur $[x_0, x_0+h]$ et dérivable sur $]x_0, x_0+h[$ alors

$$\exists t_h \in]x_0, x_0+h[, \quad f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(t_h) \quad \text{(Théorème des accroissements finis)}$$

En physique : Si la mesure de la grandeur physique $f = f(x)$ dépend de la mesure d'un paramètre x sur laquelle on commet une erreur absolue Δx alors l'incertitude absolue sur la mesure de f en $x = x_0$ est : $\Delta f = \left|f'(x_0)\right|\Delta x$

En maths : Si $\left[f : (x,y) \mapsto f(x,y)\right]$ est de régularité suffisante, on a :

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \sqrt{h^2+k^2}\,\underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\to 0}$$

En physique : Si la mesure de la grandeur $f = f(x,y)$ dépend des mesures des paramètres x et y sur lesquelles on commet les erreurs absolues Δx et Δy alors l'incertitude absolue sur la mesure de f en (x_0, y_0) est :

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\Delta y$$