Chapitre I : Étudier une fonction réelle

0) Vocabulaire général sur les fonctions

Définir la fonction f, c'est donner un l'ensemble D où évolue *la variable* x et *une expression* $f(x)$ qui dépend de x. D est *l'ensemble de définition* de f et $f(x)$ est *l'image par* f de l'élément x. **Attention à ne pas confondre f et $f(x)$!**

En langage courant, on écrit " Soit la fonction f définie sur D par $f(x) = \dots$"

L'écriture symbolique est plus précise $\left[\begin{array}{rcl} f: D & \to & F \\ x & \mapsto & f(x)\end{array}\right]$ se lit : (A noter : $\to$ signifie "dans", $\mapsto$ signifie "associe")

"f est la *fonction définie sur D à valeurs dans F* qui à x associe $f(x)$"

F est un ensemble qui contient les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x décrit D. Attention ! Il n'est pas unique.
Néanmoins, il est parfois utile de donner le domaine le plus précis appelé alors *l'image de f* : $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$.

Exemples : la fonction exponentielle exp est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais aussi dans $]0, +\infty[$

$\left[\begin{array}{rcl} g: [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2+x}\end{array}\right]$ est aussi à valeurs dans .... et aussi dans $f([0, +\infty[) = \dots\dots\dots$

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions réelles c'est à dire que les valeurs prises par $f(x)$ sont des réels aussi on pourra toujours choisir $F = \mathbb{R}$. De plus, D sera aussi une partie de $\mathbb{R}$ de sorte que x est aussi un nombre réel.

On étudie *une fonction réelle de la variable réelle.*

Attention ! La fonction est définie par son expression et par son ensemble de définition !
Si on change ce dernier tout en conservant la même expression, on définit une autre fonction.

Exemple : $\left[\begin{array}{rcl} [0, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2+x}\end{array}\right]$ n'est plus la fonction g : c'est la restriction de g à $[0, 2]$ qu'on note $g_{/[0,2]}$

Souvent, la fonction f n'est donnée que par son expression $f(x)$ sans que ne soit précisé l'ensemble de définition : " Soit la fonction f donnée par $f(x) = \dots$" Dans ce cas, on détermine et on utilise pour ensemble de définition *le domaine de définition de f* c'est à dire l'ensemble des réels x où l'expression $f(x)$ existe.

Exemple : Le domaine de définition de $\left[x \mapsto \sqrt{2+x}\right]$ est ....

I) Déterminer le domaine de définition et le domaine d'étude

Étudier une fonction, c'est dégager un maximum de propriétés avec pour finalité la construction d'un tableau de variation ou du tracé de la courbe représentative. Certaines propriétés de la fonction permettent de restreindre l'étude de la fonction à un domaine plus petit et traduisent des propriétés géométriques de la courbe représentative.

> Définition *(Parité)* Une fonction f définie sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$ est paire si :
> - D est symétrique par rapport à 0 : $\forall x \in D,\ -x \in D$
> - Pour tout x dans D, $f(-x) = f(x)$
>
> *Il suffit alors d'étudier la fonction sur $D \cap [0; +\infty[$ puisque la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*

> Définition *(Imparité)* Une fonction f définie sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$ est impaire si :
> - D est symétrique par rapport à 0 : $\forall x \in D,\ -x \in D$
> - Pour tout x dans D, $f(-x) = -f(x)$
>
> *Il suffit alors d'étudier la fonction sur $D \cap [0; +\infty[$ puisque la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ présente une symétrie par rapport à l'origine.*

> Définition *(Périodicité)* Une fonction f définie sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$ est Tpériodique où $T \in \mathbb{R}^*$ lorsque
>
> $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D \Leftrightarrow x + T \in D$ et $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$
>
> *Il suffit alors d'étudier la fonction sur un intervalle d'amplitude $|T|$ puisque la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est conservée par les translations de vecteurs $k\,T\vec{i}$ (où $k \in \mathbb{Z}$)*

II) Étudier la régularité d'une fonction (Continuité, dérivabilité et calcul de la dérivée)

Théorème **Continuité et opérations**

- Si f est définie sur un voisinage D d'un réel a (mais pas forcément en a) alors
  * lorsque f est définie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, on dit que f *est continue en a*
  (éventuellement uniquement $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = f(a)$ si a est une extrémité)
  * lorsque f n'est pas définie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$,
  alors on peut définir f sur $D \cup \{a\}$ en posant $f(a) = \ell$, on dit qu'*on prolonge f par continuité en a.*

En fait, on a définit une "nouvelle" fonction car on a changé le domaine de définition) mais, en général,on convient de l'appeler encore f

- La fonction f définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue sur I si elle est continue en a pour tout réel a de I

- Soient $[f : I \to \mathbb{R}]$ et $[g : I \to \mathbb{R}]$ des fonctions continues sur l'intervalle I, et k un nombre réel alors :
  * kf est continue sur l'intervalle I *(multiplication par un scalaire)*
  * $f + g$ est continue sur l'intervalle I *(somme)*
  * fg est continue sur l'intervalle I *(produit)*
  * Si g ne s'annule pas sur l'intervalle I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur l'intervalle I *(quotient)*

- Soient $[f : I \to \mathbb{R}]$ continue sur l'intervalle I et $g : J \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle J avec $f(I) \subset J$ alors
  $[g \circ f : I \to \mathbb{R}]$ est continue sur l'intervalle I *(composition)*

Théorème **Dérivabilité et opérations**

- Soit f est une fonction continue en a(éventuellement prolongée en a), f est dérivable en a
  lorsque la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et on note alors $f'(a)$ cette limite.
  (éventuellement uniquement $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0^{\pm}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe lorsque a est une extrémité)

- Une fonction f continue sur l'intervalle I est dérivable sur I si elle est dérivable en a pour tout réel a de I

- Soient $[f : I \to \mathbb{R}]$ et $[g : I \to \mathbb{R}]$ des fonctions dérivables sur l'intervalle I, et k un nombre réel alors :
  * kf est dérivable sur l'intervalle I et $(kf)' = kf'$ *(multiplication par un scalaire)*
  * $f + g$ est dérivable sur l'intervalle I et $(f + g)' = f' + g'$ *(somme)*
  * fg est dérivable sur l'intervalle I et $(fg)' = f'g + g'f$ *(produit)*
  * Si g ne s'annule pas sur l'intervalle I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ *(quotient)*

- Soient $[f : I \to \mathbb{R}]$ dérivable sur l'intervalle I et $[g : J \to \mathbb{R}]$ dérivable sur l'intervalle J avec $f(I) \subset J$ alors
  $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$ *(composition)*

Cette formule plus générale vous permet de retrouver des formules vues en terminale :

Cas particulier : Si $[u : I \to \mathbb{R}]$ est dérivable sur I alors $\left(e^u\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Si $[u : I \to \mathbb{R}]$ est dérivable sur I avec $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ alors $\left(\ln u\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque Pour bien utiliser ce théorème, la phrase suivante permet de ne pas oublier d'hypothèse :
"La fonction f est dérivable sur I à valeurs dans J où la fonction g est dérivable donc la composée $g \circ f$ est dérivable sur I"

Attention ! f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a mais la réciproque est fausse ! Contre-ex : $[x \mapsto |x|]$

Exemple : Définition, continuité et dérivabilité de $\left[f : x \mapsto \sqrt{2 - |x+1|}\right]$

III) Établir le sens de variations d'une fonction

Les théorèmes usuels permettent en général de justifier la dérivabilité sur une grande partie du domaine d'étude ce qui suffit en général pour préciser le sens de variation de la fonction.

THÉORÈME **_Liens entre variation d'une fonction et signe de sa dérivée_**

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$;
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $f'(x) > 0$ pour tout x de I sauf en des points isolés ;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f'(x) < 0$ pour tout x de I sauf en des points isolés.

Attention, on peut parfois déterminer le sens de variations d'une fonction sans calculer la dérivée !

PROPOSITION **_Variations et composition_**

La composée $g \circ f$ de fonctions monotones est monotone : croissante si g et f ont la même monotonie et décroissante sinon.

IV) Étudier la dérivabilité en certains points particuliers

Néanmoins, il reste parfois certains points où une étude particulière est nécessaire pour préciser l'allure de la courbe. On peut alors utiliser les techniques ou les résultats suivants pour étudier la dérivabilité en un point :

POINT MÉTHODE
Comment justifier qu'une limite n'existe pas ?

Pour démontrer qu'une limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- n'existe pas dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on peut trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$$
$$\text{mais} \quad f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad f(v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_2 \quad \text{où } \ell_1 \neq \ell_2$$
- n'existe pas dans $\mathbb{R}$, on peut aussi trouver une suite (u_n) telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$
$$\text{mais} \quad f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$$

Exemple : Prouver que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$ et $\left[f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}\right]$ n'a pas de limite en 0.

THÉORÈME **_Théorème de prolongement d'une dérivée_**

Soient f une fonction continue sur l'intervalle I et a un réel de I,
si f est dérivable sur $I - \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

(éventuellement $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe si a est une extrémité de I)

Attention, ce n'est qu'une condition nécessaire ! $f'(a)$ peut exister sans que $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe...

V) *Établir des tangentes à la courbe représentative d'une fonction*

DÉFINITION et PROPOSITIONS **Tangentes à la courbe représentative d'une fonction**

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit a un réel de I et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal,

Les cordes issues du point $A(a, f(a))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ tendent vers une droite limite qui passe par A

on dit alors que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une tangente au point d'abscisse a

lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

• Si la fonction f est dérivable en a, alors

$*$ Le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur (ou pente) de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

$*$ L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a à la courbe $\mathcal{C}_f$ est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemples :

$*$ Lorsque $f'(a) = 0$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède *une tangente horizontale* au point d'abscisse a.

Exemples :

• Si la fonction f n'est pas dérivable en a, mais que

$*$ $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \ell_+ \in \mathbb{R}$ existe $\left(\text{resp. } \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \ell_- \in \mathbb{R}\right)$

on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a

et la courbe $\mathcal{C}_f$ possède *une demi-tangente* de pente ℓ_+ (resp. ℓ_-) au point d'abscisse a.

Exemples :

$*$ $\lim\limits_{x \to a^\pm} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0^\pm} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \pm\infty$ ou que $\lim\limits_{x \to a^\pm} f'(x) = \pm\infty$

on dit alors que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède *une demi-tangente verticale* au point d'abscisse a.

Exemples :

Proposition **_Première approche des développements limités pour la physique_**

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel de I,

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe un réel } f'(a) \text{ tel que : } \quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. On note f admet un $DL_1(a)$.
$[h \mapsto f(a) + hf'(a)]$ *est une fonction polynômiale de degré inférieur à 1 : c'est la partie principale du DL*
Le DL est d'ordre 1 car le reste est de la forme $h\varepsilon(h) = h^1 \times \varepsilon(h)$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a et on note f admet un $DL_n(a)$ où $n \in \mathbb{N}$ lorsqu'il existe une fonction polynômiale réelle $[h \mapsto a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n]$ de degré inférieur à n soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction ε telle que : $\quad f(a+h) =_a a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots a_n h^n + h^n \varepsilon(h) \quad$ avec $\quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

<u>Ex</u> : $\dfrac{1}{1-x} =_0 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \times \underbrace{\dfrac{x}{1-x}}_{\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0} \qquad \dfrac{1}{1+x} =_0 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \times \varepsilon(x)$

Le DL n'apporte une information intéressante que localement au voisinage du réel a. L'expression exacte de ε n'a pas d'importance
On admet (pour l'instant) que les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ lorsqu'ils existent sont uniques et ne dépendent que du réel a et de f.
Voici, les premiers termes des DL usuels à connaître (si besoin, on donnera pour le moment les termes suivants) :

$$e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \qquad \ln(1+x) =_0 x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \ln(1-x) =_0 -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \qquad \sin x =_0 x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \qquad \tan x =_0 x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha =_0 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{En particulier,} \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

Voir l' exercice A-6 pour les premières opérations sur les développements limités

VI) <u>*Étudier le comportement asymptotique de la fonction*</u>

Définition **_Asymptotes_**

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a est un réel de I ou une extrémité de I et ℓ un réel quelconque, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal,

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (éventuellement $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$)
  alors la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* à la courbe $\mathcal{C}_f$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$)
  alors la droite $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

- La droite d'équation $y = mx + p$ (où $(m,p) \in \mathbb{R}^2$ sont fixés) est une *asymptote oblique* à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+p)] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (mx+p)] = 0$)

- Plus généralement, si g est une fonction définie sur I de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans le repère, on dira que la courbe $\mathcal{C}_g$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)
  si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)] = 0$)

Point méthode **_Comment étudier une branche infinie ?_**

Lorsque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie qu'il faut étudier.
On étudie alors la limite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$*$ Si la limite n'existe pas, il n'y a pas de branche parabolique ni d'asymptote.

$*$ Si la limite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ existe (où $m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) ,

- lorsque $m = \pm\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ présente une *branche parabolique dans la direction asymptotique* $(O;\vec{j})$ (il n'y a pas d'asymptote oblique)

- lorsque $m = 0$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ présente une *branche parabolique dans la direction asymptotique* $(O;\vec{i})$ (il n'y a pas d'asymptote)

- lorsque $m \in \mathbb{R}^*$, on étudie la limite $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx]$
  $->$ si $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] = p \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = mx + p$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$

  $->$ si $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] = \pm\infty$, alors on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ présente
  une *branche parabolique dans la direction asymptotique* $y = mx$
  $->$ sinon il n'y a pas de branche parabolique ni d'asymptote.

Comment étudier la position de la courbe par rapport à une éventuelle courbe asymptote ?

Si les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont asymptotes au voisinage de l'infini, la position respective des deux courbes est donnée par l'étude du signe de $f(x) - g(x)$.

Point méthode **_Comment étudier une fonction à valeurs réelles ?_**

1°/ On détermine le domaine de définition puis le domaine d'étude.

2°/ On précise la régularité de la fonction sur le domaine d'étude à l'aide des théorème usuels.
On précise le sens de variation de la fonction sur ce domaine.
Pour cela, on peut éventuellement calculer la dérivée $f'(x)$ lorsqu'elle existe et étudier son signe.

3°/ On précise les limites aux bornes et les valeurs exactes remarquables afin de compléter le tableau de variation
Il doit contenir les bornes du domaine d'étude, les points où f' s'annule, les points de discontinuité,
et les points où f n'est pas dérivable, .

4°/ On étudie les branches infinies lorsque c'est nécessaire.

5°/ On précise les (demi-)tangentes aux points de discontinuité, aux points où f n'est pas dérivable
et aux points où f a été prolongée

6°/ On place sur le dessin <u>tous les éléments remarquables</u> relevés dans l'étude et on peut préciser le tracé
- en précisant la position de la courbe par rapport à d'éventuelles asymptotes, ou tangentes remarquables.
- en précisant les points d'intersection avec les axes.