Chap X : Les structures d'un espace vectoriel

I) Structure d'espace vectoriel

I.1) Définition et premiers exemples

Définition **Structure d'espace vectoriel**

$\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que $(E,+,\mathbb{K}.)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou que $(E,+,\mathbb{K}.)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel (et on note en abrégé E est un $\mathbb{K}$ev) lorsqu'on définit sur l'ensemble E :

-une loi de composition interne $+$ telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif;

-une loi externe : $\begin{bmatrix} \mathbb{K}. : \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\alpha,x) & \mapsto & \alpha.x \end{bmatrix}$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$

telle que :
(1) $\forall \alpha\in\mathbb{K}, \forall (x,y)\in E^2,\ \alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$
(2) $\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E,\ (\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$
(3) $\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E,\ \alpha.(\beta.x)=(\alpha\beta).x$
(4) $\forall x\in E,\ 1.x=x$

Les éléments de l'espace vectoriel E sont alors appelés les vecteurs
et les éléments du corps $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires

Exemples : - L'ensemble des vecteurs du plan (ou ceux de l'espace) est un $\mathbb{R}$ev
-$(\mathbb{R},+,\mathbb{R}.)$ est un $\mathbb{R}$ ev et $(\mathbb{C},+,\mathbb{C}.)$ est un $\mathbb{C}$ev
- $(\mathbb{C},+,\mathbb{R}.)$ est aussi un $\mathbb{R}$ev.
Les espaces vectoriels $(\mathbb{C},+,\mathbb{C}.)$ et $(\mathbb{C},+,\mathbb{R}.)$ sont différents.

Proposition **Produit cartésien d'espaces vectoriels**

Si E et F sont des $\mathbb{K}$ev, alors $E\times F$ est aussi un $\mathbb{K}$ev pour les lois

$$+ : \begin{array}{ccc} (E\times F)^2 & \to & E\times F \\ \big((x,y),(x',y')\big) & \mapsto & (x+x';y+y') \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{K}. : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times(E\times F) & \to & E\times F \\ \big(\alpha,(x,y)\big) & \mapsto & (\alpha x,\alpha y) \end{array}$$

Exemples : Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des $\mathbb{R}$ev et $\mathbb{C}^n$ est aussi un $\mathbb{C}$ ev.

Proposition **Espace vectoriel E^X pour E $\mathbb{K}$ev**

Si E est un $\mathbb{K}$ev et si X est un ensemble quelconque,
alors $E^X=\mathcal{F}(X,E)=\{f : X\to E\}$ est un $\mathbb{K}$ ev pour les lois usuelles

Exemples : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ ev
$\mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles et définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ev
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall n\in\mathbb{N}, u_n\in\mathbb{R}\}$ l'ensemble des suites réelles est un $\mathbb{R}$ev.
$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}=\{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall n\in\mathbb{N}, z_n\in\mathbb{C}\}$ l'ensemble des suites complexes est un $\mathbb{R}$ev ou un $\mathbb{C}$ev .

I.2) Régles de calcul dans un $\mathbb{K}$ev

PROPOSITION ***Règles de calcul dans un $\mathbb{K}$ev***

Si E est un $\mathbb{K}$ev, on note 0_E l'élément neutre du groupe $(E, +)$ alors :

- $\forall x \in E, \quad 0.x = 0_E \quad$ et $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha.0_E = 0_E$
- $\forall x \in E, \quad (-1).x = -x \quad$ et $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad (-\alpha).x = -(\alpha.x) = \alpha.(-x)$
- $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \alpha.x = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $x = 0_E$

DÉFINITION ***Combinaisons linéaires***

Si E est un $\mathbb{K}$ev,
- une combinaison linéaire (en abrégé CL) de n vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de E est un vecteur x de E qui s'écrit $\quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad$ où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$
- une combinaison linéaire d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E où I est un ensemble quelconque est une combinaison linéaire <u>d'un nombre fini</u> de vecteurs de E.

II) Sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ev

II.1) Définition et caractérisations

DÉFINITION ***Sous-espace vectoriel***

Soit E un $\mathbb{K}$ ev, une partie F de E est un sous-espace vectoriel (en abrégé sev) de E lorsque :

1) F est non vide : $\quad F \neq \emptyset$
2) F est stable par $+$: $\quad \forall (x, y) \in F^2, \; x + y \in F$
3) F est stable par $\mathbb{K}.$: $\quad \forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \; \alpha.x \in F$

MÉTHODE En général, pour montrer que $F \neq \emptyset$, on montre que $0_E \in F$

PROPOSITION Si F est un sev d'un $\mathbb{K}$ev $(E, +, \mathbb{K}.)$ alors $(F, +, \mathbb{K}.)$ est aussi un $\mathbb{K}$ ev

MÉTHODE En général, pour montrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$ev,
on montre que c'est un sev d'un $\mathbb{K}$ev E plus grand déjà connu.

CARACTÉRISATIONS ***Caractérisation des sev d'un $\mathbb{K}$ev***

Si E est un $\mathbb{K}$ev et si F est une partie de E alors

1) F est un sev de $E \quad \Leftrightarrow \quad F \neq \emptyset \quad$ et $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in F^2, \; \alpha x + y \in F$
2) F est un sev de $E \quad \Leftrightarrow \quad F$ est non vide et F est stable par combinaison linéaire.

II.2) *Intersection et somme de sous-espaces vectoriels*

PROPOSITION **Intersection de sous-espaces vectoriels**

Soit E un $\mathbb{K}$ev,
- Si F et G sont des sev de E alors $F \cap G$ est aussi un sev de E
- Plus généralement, un intersection quelconque de sev de E est encore un sev de E c'est à dire :

Si I est un ensemble quelconque et $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sev de E alors

$$\bigcap_{i\in I}\{x \in E | \forall i \in I, x \in F_i\} \text{ est un sev de } E$$

Attention ! C'est faux en général pour la réunion $\boxed{F \cup G \text{ est un sev } \Leftrightarrow \ F \subset G \text{ ou } G \subset F}$ (cf. ex R1)

DÉFINITION et PROPOSITION **Somme de sous-espaces vectoriels**

Soit E un $\mathbb{K}$ev,
- Si F et G sont des sev , alors l'ensemble $\left\{x_F + x_G \mid x_F \in F \text{ et } x_G \in G\right\}$ est un sev de E

On dit que c'est le sev somme de sev F et G et on le note $F + G$.
- Plus généralement, si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont n sev de E ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), leur somme

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in F_i\right\} \text{ est un sev de } E$$

L'inclusion $F + G \subset E$ *est toujours vraie mais elle peut être stricte.*
Attention ! *Lorsque* $E = F + G$ *on sait que*
pour tout vecteur x de E, il y a une décomposition du type $x = x_F + x_G$ *où* $x_F \in F$ *et* $x_G \in G$
Mais, en général, ***la décomposition n'est pas unique !*** *(Voir ex A-7)*

II.4) *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*

DÉFINITION **Sous-espaces vectoriels supplémentaires**

Si F et G sont des sev d'un $\mathbb{K}$ev E, on dit que F et G sont supplémentaires lorsque

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$$

On note alors $E = F \oplus G$

CARACTÉRISATION $E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}$

Attention, Il n'y a pas unicité du supplémentaire !
Dans l'exercice A-7, S_1 et S_2 sont des supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$ avec $S_1 \neq S_2$
Aussi, on ne dit pas "le" supplémentaire de F dans E mais "un" supplémentaire de F dans E

Egalement, un même sev peut être supplémentaire à plusieurs sev !
Dans l'exercice A-7 toujours, S_2 est un supplémentaire de F et de G où F et G sont des sev distincts

III) *Sous-espace affine d'un* $\mathbb{K}$*ev*

Définition **_Sous-espace affine d'un et translation dans un_ $\mathbb{K}$_ev_**

Si E est un $\mathbb{K}$ev,

• Si a est un vecteur de E, la translation τ_a de vecteur a est l'application $\left[\begin{array}{rcl} \tau_a : E & \to & E \\ x & \mapsto & x+a \end{array}\right]$

• Une partie W de E est un sous-espace affine de E s'il existe un sev F de E et un vecteur a de E tel que W soit l'image de F par la translation de vecteur a : $W = \{a + x \mid x \in F\} = \{y \in E \mid \exists x \in F,\ y = a + x\}$

On note alors $W = a + F$ et on a : $x \in W \Leftrightarrow x - a \in F$

Proposition et Définition **_Direction d'un sous-espace affine_**

Si W est un sous-espace affine du $\mathbb{K}$ ev E, alors le sev dont il est l'image par une translation est unique.

On l'appelle direction de W et on le note $\overrightarrow{W}$

Par contre, le vecteur a définissant la translation n'est pas unique : $W = a + \overrightarrow{W} \Leftrightarrow a \in W$

<u>Exemples</u> Description des sev et des sous-espace affine dans le plan et l'espace.
Retour sur l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire premier ou du second ordre

Définition **_Parallèlisme dans un_ $\mathbb{K}$_ev_**

Les sous-espaces affines W et W' d'un $\mathbb{K}$ ev E sont parallèles si $\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'}$ ou $\overrightarrow{W'} \subset \overrightarrow{W}$

<u>Exemples</u> Parallélisme des droites dans le plan (ou l'espace) et colinéarité des vecteurs directeurs
Parallélisme d'un plan et d'une droite et coplanarité des vecteurs directeurs