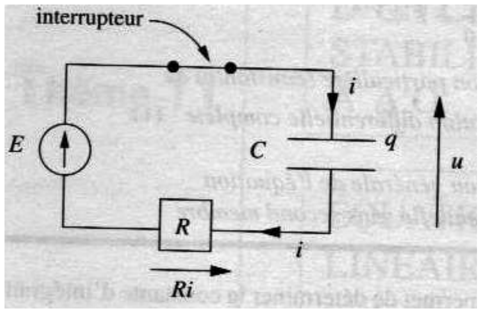
CHAP II : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES RÉELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

I) *Exemples d'équations différentielles réelles linéaires du premier ordre*



Un exemple concret Dans le circuit ci-contre, la tension E du générateur, l'intensité i du circuit, la charge q de l'armature du condensateur et la tension u du condensateur sont des fonctions du temps t.
La tension u aux bornes du condensateur est nulle à l'instant $t = 0$.

La tension u vérifie l'équation : $\boxed{RC\dfrac{du}{dt} + u = E}$

On dit que la fonction u est une solution d'une équation différentielle reélle linéaire du premier ordre avec la condition initiale $u(0) = 0$

D'autres exemples Les équations $y' - 2xy = 4x$, $(1+t^2)^2y' + 2ty = te^{\frac{1}{1+t^2}}$ sont aussi linéaires du premier ordre
Les équations $y' + y^2 = 0$ ou $y'y = 1$ sont du premier ordre mais elles ne sont pas linéaires.

DÉFINITIONS **Équations différentielles linéaires du premier ordre**

- Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* est une équation du type $\boxed{\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \quad (E)}$ où α, β et γ sont des fonctions connues, continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

On notera l'abus de notations utilisé dans l'équation...Ici, l'inconnue y est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de variable t.

Il faut bien identifier la fonction inconnue (en général y en maths, x, z, u en physique) et la variable (t, x en maths, t, x ou autres en physique)

- Une *solution sur l'intervalle I* de cette équation (E) est une fonction f dérivable sur I à valeurs réelles telle que : $\forall t \in I, \quad \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$

Attention ! La notion de solution n'a pas de sens si on ne précise pas l'intervalle I où elle est solution !

- On appelle *équation homogène (ou sans second membre) associée à* (E) l'équation $\boxed{\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0 \quad (H)}$
- Résoudre l'équation (E) (resp. (H)) sur I revient à chercher toutes les solutions de (E) (resp. de (H)) sur I.
L'ensemble $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_H$) des solutions de (E) (resp. de (H)) est donc un ensemble de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

II) *Ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre*

PROPOSITIONS **Structure des ensembles de solutions**

- Si y_1 et y_2 sont des solutions de (H) sur I alors, pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est aussi une solution de (H) sur I

On dit que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) sur I est stable par combinaison linéaire

et $\mathcal{S}_H \neq \emptyset$ (car $[x \to 0] \in \mathcal{S}_H$) aussi $\mathcal{S}_H$ ***est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.***

- Si $\begin{cases} y_0 \text{ est une solution particulière de l'équation } (E) \text{ sur } I \\ \mathcal{S}_H \text{ est l'ensemble solution sur } I \text{ de l'équation homogène } (H) \end{cases}$ alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de (E) est : $\mathcal{S} = \{y_0 + h \quad | \quad h \in \mathcal{S}_H\}$

On dit que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^I$ de direction $\mathcal{S}_H$ issue de y_0

POINT MÉTHODE ***Résolution de l'équation*** $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \quad (E)$

- Dans la pratique, on résout l'équation différentielle (E) sur un intervalle I où la fonction α ne s'annule pas.
L'équation (E) est donc équivalente à une équation (E') du type $y' + a(t)y = b(t)$ *(equation dite résolue en y')*
- Pour résoudre $y' + a(t)y = b(t)$ sur I :
  - on résout d'abord l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$ sur I ;
  - on recherche une solution particulière y_0 de $y' + a(t)y = b(t)$ sur I

L'ensemble des solutions de (E') sur I est alors $\mathcal{S} = \{y_0 + h \quad | \quad h \in \mathcal{S}_H\}$ où S_H est l'ensemble des solutions de (H) sur I

- Lorsque la fonction α s'annule sur I, on résout l'équation sur des intervalles I_1, I_2, ... inclus dans I où α ne s'annule pas puis on étudie le "recollement" des solutions au niveau des zéros de α...

III) Résolution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$

PROPOSITIONS **Équation $y' + ay = 0$ où $a \in \mathbb{R}$**

- Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions $[x \mapsto Ce^{-ax}]$ avec $C \in \mathbb{R}$
  C est une constante arbitraire évoluant dans $\mathbb{R}$, appelée constante d'intégration : $\mathcal{S} = \left\{ [x \mapsto Ce^{-ax}] \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$

- La fonction $[x \mapsto e^{kx}]$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ky$ où $k \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

PROPOSITION **Équation $y' + a(t)y = 0$ où a est une fonction continue sur I**

Les solutions sur I de l'équation $y' + a(t)y = 0$ lorsque a est une fonction continue sur I sont les fonctions $[x \mapsto Ce^{-A(t)}]$ où A est une primitive de a sur I et où C est une constante arbitraire dans $\mathbb{R}$.

On admet, pour l'instant, que toute fonction continue sur I possède des primitives sur I

IV) Recherche d'une solution particulière

∗ On peut essayer de trouver une solution particulière ***"analogue" au second membre*** et procéder par identification.
∗ On peut utiliser le ***principe de superposition des solutions*** :
Si y_1 est une solution sur I de $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 est une solution de $y' + a(t)y = b_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est une solution sur I de l'équation $y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$
∗ On peut utiliser la ***méthode de variation de la constante*** :
on recherche la solution particulière sous la forme $f(t) = C(t)h(t)$ où h est une solution de l'équation homogène.
Outre ses applications pratiques, cette méthode permet de prouver les résultats théoriques importants suivants :

PROPOSITIONS **Existence de solutions pour $y' + a(t)y = b(t)$ et unicité de la solution avec condition initiale**

- Si a et b sont des fonctions continues de I sur $\mathbb{R}$, alors l'équation $y' + a(t)y = b(t)$ admet des solutions sur I

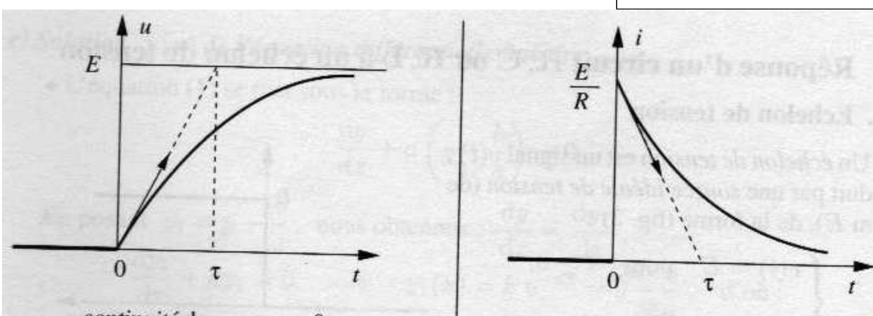
- Si a et b sont des fonctions continues de I sur $\mathbb{R}$ et si $(t_0; y_0) \in I \times \mathbb{R}$, alors
  la condition initiale $y(t_0) = y_0$ détermine une unique solution pour l'équation $y' + a(t)y = b(t)$

Attention ! Ces propositions sont fausses pour l'équation $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ (E) lorsque α s'annule sur I
$->$ L'équation (E) peut avoir une unique solution, ne pas avoir de solution ou bien en avoir une infinité (voir Ex E1)
$->$ Une condition initiale n'assure plus l'unicité de la solution (voir Ex E1)

Retour sur l'exemple de la charge du condensateur à travers une résistance

L'unique solution de l'équation $RC\dfrac{du}{dt} + u = E$ avec la condition initiale $u(0) = 0$ est $\boxed{u(t) = E\left[1 - \exp\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)\right]}$

où $\tau = RC$ est la constante de temps. L'intensité i de ce circuit est donc $\boxed{i(t) = C\dfrac{du}{dt} = \dfrac{E}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$



continuité de $u_{(t)}$ en $t = 0$ discontinuité de $i_{(t)}$ en $t = 0$