

CHAP III : CALCULS ET ÉQUATIONS AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

I) Généralités sur les nombres complexes

DÉFINITION

Ensemble des nombres complexes

- On définit le nombre imaginaire noté i comme un nombre vérifiant $i^2 = -1$

Attention ! Ce nombre i est parfois noté j en électricité...

- Un nombre complexe est alors un nombre de la forme $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

On munit $\mathbb{C}$ de deux lois $+$ et $\times$ définies par :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad \text{et} \quad (a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

DÉFINITION

Le vocabulaire des nombres complexes

- Si z est un nombre complexe,
 - l'écriture $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est la *forme algébrique* du nombre complexe z
 - le réel x est la *partie réelle* du nombre complexe z notée $\operatorname{Re}(z) = x$
 - le réel y est la *partie imaginaire* du complexe z notée $\operatorname{Im}(z) = y$

$$z \text{ est un nombre réel} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

$$z \text{ est un nombre imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

- Le corps $\mathbb{C}$ peut être identifié à un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ appelé *plan complexe*.
 - l'axe $(O; \vec{u})$ est l'axe des réels ;
 - l'axe $(O; \vec{v})$ est l'axe des imaginaires purs ;

A chaque nombre complexe $z = x + iy$, on associe un unique point M de coordonnées (x, y) dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$

M est l'image du complexe z et, réciproquement, z est l'*affixe* du point M et on note $M(z)$

On dit aussi que z est l'affixe du vecteur $\vec{OM}$ et on note $\vec{OM}(z)$

- Le nombre complexe conjugué du complexe $z = x + iy$ est le nombre $\bar{z} = x - iy$
Les images $M(z)$ et $\bar{M}(\bar{z})$ des complexes z et $\bar{z}$ dans le plan complexe sont symétriques par rapport à l'axe réel.
- On définit le module du nombre complexe $z = x + iy$ par le réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
Dans le plan complexe, si M est le point d'affixe z , alors $|z| = OM$
- Lorsque z est un complexe non nul, et si M est le point d'affixe z dans le plan complexe
on appelle argument de z , noté $\arg z$, une mesure en radian (modulo 2π) de l'angle $(\vec{u}; \vec{OM})$
- Tout nombre complexe non nul z est repéré de manière unique par son module et un argument θ
par $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$: cette écriture est la forme trigonométrique du complexe z .

PROPOSITION

Propriétés liées à la conjugaison

$$\bullet \forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{et} \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

$$\bullet \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$\bullet \forall z \in \mathbb{C}, \quad z \text{ est un nombre réel} \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad \text{et} \quad z \text{ est un nombre imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

PROPOSITION

Propriétés du module

$$\bullet \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |zz'| = |z||z'| \quad \text{et, si } z' \neq 0, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\bullet \forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

(Inégalités
triangulaires)

$$\bullet \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{et} \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

avec égalité si $z' = 0$ ou $z = 0$ ou $z = \lambda z', \lambda > 0$

II) Nombres complexes de module 1, exponentielle complexe**II.1) Définition et description de l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1**

DÉFINITION et PROPOSITION

Ensemble des complexes de module 1

- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, \quad z.z' \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \bar{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U} \quad (\text{en particulier } z \neq 0)$$

DÉFINITION
et PROPOSITION**Représentation exponentielle des complexes de module 1****Représentation exponentielle des nombres complexes**

Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

- $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique de centre O de rayon 1

On admet le lemme suivant pour l'instant : Si a et b sont des réels avec $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ avec $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$

- Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = |z|e^{i\theta}$ où θ est une valeur de l'argument de z

Cette écriture est appelée *forme exponentielle* du nombre complexe z

PROPOSITION

Propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$

(Formules d'Euler) $\bullet \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$\bullet \forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'} \quad \left(\text{et on a aussi } e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \right)$

$$\bullet \forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$$

(Formule de Moivre) $\bullet \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

PROPOSITION

Propriétés des arguments

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi] \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

II-2) Application de l'exponentielle complexe à la trigonométrie

POINT MÉTHODE

Application de l'exponentielle complexe à la trigonométrie

- **Linéariser une expression trigonométrique** c'est transformer une expression de la forme $\cos^n x \sin^m x$ où $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ en une expression de la forme $\cos(px)$ ou $\sin(qx)$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Cette manipulation est surtout utilisée pour trouver des primitives.

OUTILS : Formules d'Euler, Formules de trigonométrie,

$$\text{Formule du binôme de Newton : } \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- **Calcul de sommes contenant des fonctions trigonométriques**

On peut essayer d'exprimer la somme comme partie réelle (ou imaginaire) d'une autre somme avec des exponentielles complexes.

OUTILS : Formule de Moivre, Formule du binôme de Newton,

$$\text{Suite géométrique : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 1, \quad \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

II-3) Construction d'une fonction exponentielle complexe

DÉFINITION et PROPOSITIONS

Fonction exponentielle complexe

- On définit l'exponentielle du complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $e^z = e^x e^{iy}$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\operatorname{Im}(z)$ est une valeur de $\arg(e^z)$

Fonctions complexes et fonctions exponentielles complexes

DÉFINITION Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dira que la fonction f est dérivable sur I lorsque les deux fonctions réelles $\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$ sont dérivables sur I .
Dans ce cas, la dérivée de la fonction f est la fonction complexe $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$

PROPOSITION Si φ est une fonction dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors

$$\left[\begin{array}{ccc} e^\varphi : & I & \rightarrow \mathbb{C} \\ & t & \mapsto e^{\varphi(t)} \end{array} \right]$$
 est aussi dérivable sur I et on a $(e^\varphi)' = \varphi' e^\varphi$

Equations différentielles linéaires complexes du premier ordre

PROPOSITION Les solutions sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \alpha(t)y = 0$ où α est une fonction à valeurs complexes de la variable réelle t qui sont continues sur I sont les fonctions de I dans $\mathbb{C}$ données par $\left[t \mapsto \gamma e^{-\Delta(t)} \right]$ où $\Delta : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de α sur I et où $\gamma \in \mathbb{C}$ est une constante d'intégration. On peut alors facilement adapter la théorie générale du cas réel aux cas complexes pour résoudre des équations du type $\lambda(t)y' + \mu(t)y = \nu(t)$ où $\lambda, \mu, \nu : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues sur I .

III-1) Équations $z^2 = a$ pour $a \in \mathbb{C}$ fixé, racines carrées d'un nombre complexe

DÉFINITION
et PROPOSITION

Racines carrées d'un nombre complexe

On appelle racine carrée d'un nombre complexe a tout nombre complexe tel que $z^2 = a$
Tout nombre complexe a possède exactement deux racines carrées qui sont opposées.

POINT MÉTHODE **Rechercher les racines carrées d'un nombre complexe a non réel**

- **Méthode trigonométrique :** On écrit a sous forme exponentielle $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$
puis on cherche les solutions sous la forme $z = r e^{i\varphi}$ avec $r > 0$
- **Méthode algébrique :** On cherche les solutions sous forme algébrique $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $z^2 = a \Rightarrow |z|^2 = |a|$ d'où on obtient une équation $x^2 + y^2 = |a|$ (1)
 $z^2 = (x + iy)^2 = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2ixy = \text{Re}(a) + i\text{Im}(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \text{Re}(a) & (2) \\ 2xy = \text{Im}(a) & (3) \end{cases}$

Les équations (1) et (2) permettent de déterminer x^2 et y^2 donc x et y sont connus au signe près
L'équation (3) permet de savoir si x et y ont le même signe ou un signe contraire.

III-2) Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

PROPOSITION **Résolution des équations du second degré à coefficients complexes**

Pour résoudre l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$,
on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux racines distinctes : $z_{\pm} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de Δ

III-3) Equation $z^n = 1$, racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité ($n \in \mathbb{N}^*$)

DÉFINITION

Equation $z^n = 1$: racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont appelés les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

PROPOSITION

Description des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

- Il existe exactement n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité qui sont les nombres complexes

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega_1^k \text{ pour } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ (ou encore pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket)$$

Dans le plan complexe, les n racines de l'unité sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côté inscrit dans le cercle unité.

- Si $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et si $(\omega_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ sont les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité alors $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ et $\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = (-1)^{n-1}$
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. On a : $\forall (\omega, \omega') \in \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_n, \quad \omega \cdot \omega' \in \mathbb{U}_n, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\omega} \in \mathbb{U}_n$
- Si ω est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1 : $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$

III-4) Equation $z^n = a$ où $a \in \mathbb{C}$ est fixé, racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe ($n \in \mathbb{N}^*$)

DÉFINITION

Equation $z^n = a$ où $a \in \mathbb{C}$ est fixé : racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Si $a \in \mathbb{C}$ est fixé, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$ sont appelés les racines $n^{\text{ième}}$ du complexe a .
Si $a \in \mathbb{C}^*$ est fixé, il y a exactement n racine $n^{\text{ième}}$ du complexe a