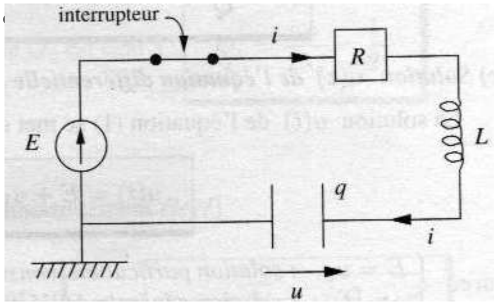
CHAP IV : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

I.1) Exemples

• Un exemple classique d'une équation linéaire du second ordre à coefficients



Dans le circuit ci-contre, on applique à $t = 0$ une tension E constante.
Initialement, l'intensité est nulle et le condensateur est déchargé :

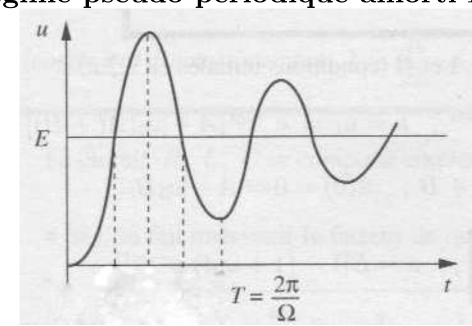
$$i(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(0) = 0$$

La tension u vérifie l'équation : $\boxed{\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{E}{LC}}$

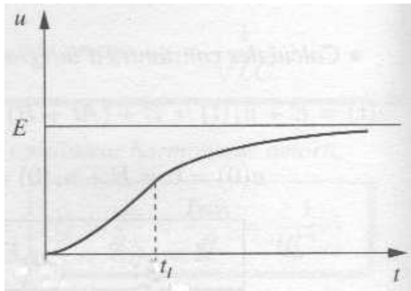
On dit que la fonction u est une solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, en posant $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on dit que u est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} u'' + 2\lambda u' + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$

Il a alors différents cas possibles selon le signe de $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$ (Programme physique TS)

Regime pseudo-périodique amorti $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$



Regime critique et apériodique $R \geq 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$



• L'équation $\quad y'' - (1+a)y' + ay = e^{ax} \quad$ où a est un réel fixé est une équation différentielle linaire du second ordre à coefficients constants à paramètre. Les coefficients sont des réels qui dépendent d'un paramètre réel a.
• L'équation $\quad y''y' = 1 \quad$ est du second ordre mais elle n'est pas linéaire. On n'étudiera pas cette année ces équations.
• L'équation $\quad x^2y'' - xy' + y = 0 \quad$ est linéaire du second ordre mais elle n'est pas à coefficients constants.
On traitera certaines de ces équations par des changements de variables ou de fonctions inconnues (Voir TD)

I.2) Structure des ensembles de solutions

DÉFINITIONS — ***Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants***

• Une *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation du type :

$$\boxed{ay'' + by' + cy = d(t) \quad (E)} \qquad \text{où } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \text{ avec } a \neq 0$$

et d est une fonction connue, continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (de variable t).
• Une *solution* de cette équation (E) sur I est une fonction f deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : $\quad \forall t \in I, \quad af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t)$

Attention ! Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut chercher soit les solutions à valeurs réelles, soit les solutions à valeurs complexes...

• On appelle *équation homogène (ou sans second membre) associée à* (E) l'équation $\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \quad (H)}$

PROPOSITIONS — ***Structure de l'ensemble des solutions***

• L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène (H) est stable par combinaisons linéaires.
$\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$
• L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation (E) sur I est $\mathcal{S} = \{f + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$ où f est une solution particulière de (E).
$\mathcal{S}$ est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^I$ de direction $\mathcal{S}_H$

II) *Résolution de l'équation homogène* $ay'' + by' + cy = 0$

THÉORÈME ***Solutions complexes de l'équation*** $ay'' + by' + cy = 0 \ (H)$ ***pour*** $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ (donc aussi $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$)

On considère l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à (H) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

• Si $\Delta \neq 0$ alors on note r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes de l'équation caractéristique.

L'ensemble $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ des solutions à valeurs complexes de (H) est alors $\boxed{S_H(\mathbb{C}) = \left\{ \left[t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \right] \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$

C'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $[y_1 : t \mapsto e^{r_1 t}]$ et $[y_2 : t \mapsto e^{r_2 t}]$

• Si $\Delta = 0$ alors on note r_0 la racine double complexe de l'équation caractéristique.

L'ensemble $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ des solutions complexes de (H) est alors : $\boxed{S_H(\mathbb{C}) = \left\{ \left[t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \right] \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}}$

C'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ engendré par $[y_1 : t \mapsto e^{r_0 t}]$ et $[y_2 : t \mapsto t e^{r_0 t}]$:

THÉORÈME ***Solutions réelles de l'équation*** $ay'' + by' + cy = 0 \ (H)$ ***lorsque*** $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

On considère l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à (H) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

• Si $\Delta > 0$ alors on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique.

L'ensemble $\mathcal{S}_H(\mathbb{R})$ des solutions réelles de (H) est $\boxed{\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \left[t \mapsto k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \right] \,\middle|\, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

C'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $[y_1 : t \mapsto e^{r_1 t}]$ et $[y_2 : t \mapsto e^{r_2 t}]$

• Si $\Delta = 0$ alors on note r_0 la racine double réelle de l'équation caractéristique.

L'ensemble $\mathcal{S}_H(\mathbb{R})$ des solutions réelles de (H) est $\boxed{\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \left[t \mapsto (k_1 + k_2 t) e^{r_0 t} \right] \,\middle|\, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

C'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $[y_1 : t \mapsto e^{r_0 t}]$ et $[y_2 : t \mapsto t e^{r_0 t}]$

• Si $\Delta < 0$ alors on note $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

L'ensemble $\mathcal{S}_H(\mathbb{R})$ des solutions réelles de (H) est $\boxed{\mathcal{S}_H(\mathbb{R}) = \left\{ \left[t \mapsto e^{\alpha t} \left[k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t) \right] \right] \,\middle|\, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

C'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $[y_1 : t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t)]$ et $[y_2 : t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)]$

III) *Recherche d'une solution particulière*

∗ On peut essayer de trouver ***une solution particulière "analogue" au second membre***.

∗ On peut toujours utiliser ***le principe de superposition des solutions***.

∗ ***Cas particulier d'un second membre du type*** $P(t)e^{mt}$ ***où*** P ***est une fonction polynôme*** :

On cherche une solution particulière sous la forme $y(t) = Q(t)e^{mt}$

où Q est une fonction polynôme dont on détermine les coefficients par identification.

Lorsque m n'est pas une racine du polynôme caractéritique, on utilise un polynôme Q avec $\deg Q = \deg P$.

Lorsque m est une racine simple du polynôme caractéristique, on utilise un polynôme Q avec $\deg Q = \deg P + 1$.

Lorsque m est une racine double du polynôme caractéristique, on utilise un polynôme Q avec $\deg Q = \deg P + 2$.

IV) *Unicité de la solution avec données initiales*

THÉORÈME ***Unicité de la solution avec données initiales de*** $ay'' + by' + cy = d(t)$ ***où*** $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$

• Si t_0 est un réel fixé et si m_0 et m'_0 sont fixés dans $\mathbb{K}$, lorsque l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ a des solutions, alors elle admet une unique solution y vérifiant $y(t_0) = m_0$ et $y'(t_0) = m'_0$.

• On admet l'existence d'une solution particulière y_0 pour l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ lorsque $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$