CHAP V : DE NOUVELLES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

I) Le théorème des bijections réciproques

THÉORÈME

Théorème des bijections réciproques

- Si $[f : I \rightarrow \mathbb{R}]$ est continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et si elle est strictement monotone sur I , alors
 - elle est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et on peut définir sa réciproque $[f^{-1} : J \rightarrow I]$
 - la réciproque f^{-1} est continue sur J et strictement monotone sur J de même monotonie que f .
 - Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ du couple des bijections réciproques f et f^{-1} dans un repère orthogonal sont des courbes qui sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$
- Si, de plus, $[f : I \rightarrow \mathbb{R}]$ est dérivable sur l'intervalle I alors
 - f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \neq 0$ et, dans ce cas, $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
 - Si f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ (donc si $f'(x_0) = 0$), alors la courbe représentative $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans un repère orthogonal possède des demi-tangentes verticales au point de coordonnées $(y_0; x_0)$
 - En particulier, lorsque f' ne s'annule pas sur I , la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable sur J et

$$\text{et } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

II) Les fonctions exponentielles et logarithmes

- Les fonctions logarithme népérien $\ln$ et exponentielle $\exp$ sont des bijections réciproques.
- Cas des fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque :

DÉFINITION et PROPOSITIONS

Exponentielles et logarithmes de base quelconque

- Pour $a > 0$, on appelle fonction exponentielle de base a la fonction $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$
- Pour $a \in]0, +\infty[- \{1\}$, on appelle fonction logarithme de base a la fonction $\log_a$ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad \log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Les propriétés algébriques usuelles s'étendent à l'exponentielle et au logarithme de base a :

- $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x > 0, \quad a^0 = 1, \quad 1^x = 1$ et aussi $\exp = \exp_e$ et $\ln = \log_e$ (de base e)
- $\forall a > 0, \forall b > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$ et $(ab)^x = a^x b^x$
- $\forall a \in]0, +\infty[- \{1\}, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall n \in \mathbb{Z},$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a(x^n) = n \log_a x$$

PROPOSITIONS

Étude des fonctions $\log_a$ et $\exp_a$

- Pour $a > 0$, la fonction $\exp_a$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
 $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\exp_a)'(x) = (\ln a)a^x$ aussi elle est strictement monotone si $a \neq 1$ croissante si $a > 1$ et décroissante sinon
- Pour $a \in]0, +\infty[- \{1\}$, la fonction $\log_a$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
 $\forall x > 0, (\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$ aussi elle est strictement monotone si $a \neq 1$ croissante si $a > 1$ et décroissante sinon

Tableaux de variations

- Pour $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $a^{\log_a(x)} = x$ pour $x > 0$ et $\log_a(a^x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$

Ainsi, si $a \in \mathbb{R}_+^ - \{1\}$, les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont des bijections réciproques*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a \in]0, 1[\end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a \in]0, 1[\end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{a^x}{x} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow +\infty \text{ pour } a > 1 \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \text{ pour } a \in]0, 1[\end{cases}$$

Si $a \in \mathbb{R}_+^ - \{1\}$, la courbe représentative de $\exp_a$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale ainsi qu'une branche parabolique dans la direction $(O; \vec{j})$*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{si } a \in]0, 1[\end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a \in]0, 1[\end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = 0$$

Si $a \in \mathbb{R}_+^ - \{1\}$, la courbe représentative de $\log_a$ admet une branche parabolique dans la direction $(O; \vec{i})$ en $+\infty$ ainsi que l'axe des ordonnées pour asymptote verticale en 0*

Représentation graphique de $\log_a$

Représentation graphique de $\exp_a$

On a aussi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_a x}{x - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + h)}{h} = \frac{1}{\ln a}$ (taux d'accroissement)

III) Les fonctions puissances

DÉFINITION

Puissance α d'un réel x où $\alpha \in \mathbb{R}$

Si α est un réel quelconque, on définit : $\forall x > 0, x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$: $x^\alpha > 0, x^0 = 1, x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$ et $1^\alpha = 1$

On a également les propriétés algébriques classiques :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$$

DÉFINITION et PROPOSITIONS

Etude de la fonction puissance

Si α est un réel quelconque, on définit la fonction f_α sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0, f_\alpha(x) = x^\alpha$

- La fonction f_α est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et : $\forall x > 0, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
de sorte que la fonction est monotone : strictement décroissante si $\alpha < 0$ et strictement croissante si $\alpha > 0$

Tableau de variation

De plus : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall x > 0, (x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = x$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les fonctions f_α et $f_{\frac{1}{\alpha}}$ forment un couple de bijections réciproques

- Prolongement en 0

- * Si $\alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ donc il n'y a pas de prolongement par continuité en 0

mais la courbe représentative de f_α admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

- * Si $\alpha \geq 0, f_\alpha$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$

Par prolongement, on peut donc donner un sens à 0^0 qui est : $0^0 = 1!$

De plus, si $\alpha > 0$: $\frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = x^{\alpha-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \text{ donc la tangente à l'origine est horizontale} \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \text{ donc la tangente à l'origine est selon la droite } y = x \\ +\infty & \text{si } \alpha \in]0, 1[\text{ donc la tangente à l'origine est verticale} \end{cases}$

- Etude asymptotique en $+\infty$:

- * Si $\alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ et l'axe des abscisses est alors une asymptote horizontale à la courbe représentative de f_α

- * Si $\alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

et $\frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \text{ donc il y a une branche infinie dans la direction } (O, \vec{j}) \\ 0 & \text{si } \alpha \in]0, 1[\text{ donc il y a une branche infinie dans la direction } (O, \vec{i}) \end{cases}$

PROPOSITION

Croissances comparées

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$

- $\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$

- $\forall (\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

POINT MÉTHODE Pour étudier une expression du type $u(x)^{v(x)}$,
on la transforme en général en $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$

IV) Fonctions circulaires réciproques

DÉFINITION et PROPOSITIONS

Fonction Arc sinus

La fonction Arc sinus, notée arcsin, est la bijection réciproque

de la fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aussi : $\left[\text{arcsin} : [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \right]$

$$\forall x \in [-1; 1], \quad y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \quad \text{et} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Elle est donc continue sur $[-1; 1]$, strictement croissante sur $[-1, 1]$

et elle est impaire : $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

Elle est aussi dérivable sur $] - 1; 1[$:

$$\forall x \in] - 1; 1[, \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Enfin, elle n'est pas dérivable en -1 et 1 mais sa courbe représentative présente des demi-tangentes verticales aux points $(-1, -\frac{\pi}{2})$ et $(1, \frac{\pi}{2})$

DÉFINITION et PROPOSITIONS

Fonction Arc cosinus

La fonction Arc cosinus, notée arccos, est la bijection réciproque de

la fonction cosinus restreinte à $[0; \pi]$ aussi : $\left[\text{arccos} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi] \right]$

$$\forall x \in [-1; 1], \quad y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \quad \text{et} \quad y \in [0; \pi]$$

Elle est continue sur $[-1; 1]$ et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

Attention ! Elle n'est pas paire :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

La fonction arccos est aussi dérivable sur $] - 1; 1[$:

$$\forall x \in] - 1; 1[, \quad (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Enfin, elle n'est pas dérivable en -1 et 1 : sa courbe représentative présente des demi-tangentes verticales aux points $(-1, \pi)$ et $(1, 0)$

DÉFINITION et PROPOSITIONS

Fonction Arc tangente

La fonction Arc tangente, notée arctan, est la bijection réciproque

de la fonction tangente restreinte à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: $\left[\text{arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\right]$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \quad \text{et} \quad y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$

et elle est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

PROPOSITIONS

Quelques propriétés utiles

$$\forall x \in [-1; 1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1; 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{signe}(x) \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = (\arcsin)'(0) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = (\arctan)'(0) = 1$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = (\arccos)'(0) = -1, \quad \text{etc}$$

V) Fonctions hyperboliques

DÉFINITION et PROPOSITIONS

Sinus, cosinus et tangente hyperbolique

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

• ch est une fonction paire, sh est une fonction impaire et th est une fonction impaire.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \text{ch}x \geq 1 \quad \text{et} \quad -1 < \text{th}x < 1$$

$$\bullet \text{ Les fonctions ch, sh et th sont continues et dérivables sur } \mathbb{R} : \quad \begin{array}{ll} \text{ch}' = \text{sh} & \text{sh}' = \text{ch} \\ \text{et} : \quad \text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x \end{array}$$

sh et th sont donc strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ et ch est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\text{ch}(x) - \frac{e^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\text{sh}(x) - \frac{e^x}{2} \right) = 0$$

La courbe d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ est une courbe asymptote aux représentations graphiques de ch et sh

$$\bullet \text{ Enfin : } \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1^+ \quad \text{donc}$$

les droites d'équation $y = 1$ et $y = -1$ sont des asymptotes horizontales à la courbe représentative de th

Représentations graphiques de ch et sh

Représentation graphique de th et coth

VI) Fonctions hyperboliques réciproques

DÉFINITION

Fonctions Argsh, Argch et Argth

- La fonction argument sinus hyperbolique, notée argsh , est la bijection réciproque de la fonction sh .

$$\left[\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right] \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \operatorname{argsh}x \Leftrightarrow \operatorname{sh}y = x$$

Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire.

La fonction argsh est aussi dérivable sur $\mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- La fonction argument cosinus hyperbolique, notée argch , est la bijection réciproque de la fonction ch restreinte à $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.

$$\left[\operatorname{argch} : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[\right] \quad \text{et} \quad \forall x \in [1; +\infty[, \quad y = \operatorname{argch}x \Leftrightarrow \operatorname{ch}y = x \quad \text{et} \quad y \in [0; +\infty[$$

Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **Attention ! Elle n'est pas paire.**

La fonction argch est dérivable sur $]1; +\infty[: \forall x \in]1; +\infty[, (\operatorname{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- La fonction argument tangente hyperbolique, notée argth , est la bijection réciproque de la fonction th

$$\left[\operatorname{argth} :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \right] \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1; 1[, \quad y = \operatorname{argth}x \Leftrightarrow \operatorname{th}y = x$$

Elle est continue et strictement croissante sur $] - 1; 1[$ et elle est impaire.

La fonction argth est continue sur $] - 1; 1[$ et dérivable sur $] - 1; 1[: \forall x \in] - 1; 1[, (\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$