CHAP VI : CALCULS DE PRIMITIVES

I) *Integrales et primitives*

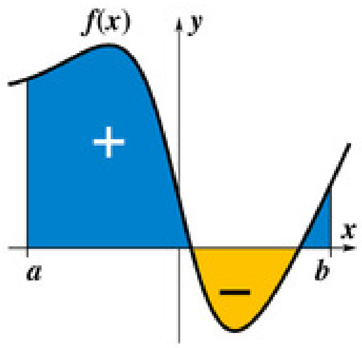
I.1) Définition et propriétés de l'intégrale (Programme TS)

Il s'agit pour l'essentiel de rappels du cours TS qui sont repris sans démonstration pour développer des techniques de preuves (étude de fonctions définies par une intégrale) et de calculs (intégration par parties, changement de variables). La construction de l'intégrale et la démonstration de ses propriétés fera l'objet d'un chapitre plus tard dans l'année.

DÉFINITION **_Integrale d'une fonction continue_**

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ $(a \leq b)$, on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal,

- ***l'intégrale de f entre a et b*** est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ correspondant à l'aire algébrique en unité d'aire (u.a.) du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$



- ***l'intégrale de f entre b et a*** est le réel noté $\int_b^a f(x)dx$ opposé à $\int_a^b f(x)dx$: $\quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

PROPRIÉTÉS **_Propriétés de l'intégrale_**

- Si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si a est un réel de I, alors $\int_a^a f(x)dx = 0$

(Positivité)
- Si f est continue sur l'intervalle I et si $(a,b) \in I^2$, alors
  si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ (resp. $\leqslant 0$) alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$ (resp. $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$)
  $$\text{De plus : } \int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

(Relation de Chasles)
- Si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si a, b et c sont des réels de I, alors
  $$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(Linéarité)
- Si f et g sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si a et b sont des réels de I, alors
  $$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^b (\alpha f(x) + g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(Croissance)
- Si f et g sont continues sur I et $(a,b) \in I^2$ alors
  si $a \leqslant b$ et si $(\forall x \in [a;b], \quad f(x) \leqslant g(x))$ alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

(Inégalité triangulaire)
- Si f est continue sur $[a;b]$ $(a \leqslant b)$, alors $\quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

I.2) Primitives et intégrales

DÉFINITION **Primitive d'une fonction**

Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

on appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

PROPOSITION Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admettant une primitive F sur I, alors

- la fonction $G : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + k$
- pour $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$

THÉORÈME **Primitive d'une fonction continue**

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si a est un réel de I, alors

la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

THÉORÈME **Formule de Newton-Leibniz**

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si a et b sont des réels de I, alors

$\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$ où F est une primitive quelconque de f sur I

PROPOSITION **Intégrale dépendant d'une de ses bornes**

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, si a est un réel de I, et si

$[u : J \to \mathbb{R}]$ est une fontion dérivable sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'intervalle I

c'est à dire vérifiant : $\forall x \in J, \quad u(x) \in I$

alors la fonction $\left[x \mapsto \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)dt\right]$ est définie et dérivable sur J

et $$\left(\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)' = u'(x) \times f(u(x))$$

Pour la fonction f définie par $f(x)$	une primitive est donnée par $F(x)$	définie sur tout intervalle I inclus dans le domaine
$e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$		
x^n où $n \in \mathbb{N}$		
$\dfrac{1}{x}$		
x^n où $n \in \mathbb{Z}_-^* - \{-1\}$		
x^α où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$		
$\cos x$		
$\sin x$		
$\mathrm{ch} x$		
$\mathrm{sh} x$		
$\tan x$		
$\mathrm{th} x$		
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$		
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^{\,2} x$		
$\dfrac{1}{1+x^2}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\dfrac{1}{1-x^2}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		

II) *Méthodes pour le calcul de primitives*

II.1) *Transformer judicieusement l'expression $f(x)$*

Point méthode **Exemples de transformations usuelles**

- Par des transformations judicieuses, on reconnaît une primitive connue dans l'intégrande.

  Exemples classiques : $\dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{t^2+1-1}{t^2+1} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$ $\quad \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \times \mathrm{ch}^2(x)} = \dfrac{\mathrm{th}\,'(x)}{\mathrm{th}\,(x)}$
- Pour calculer une intégrale du type $\displaystyle\int \cos^p(x)\sin^q(x)\,dx$ où $(p,q)\in\mathbb{N}^2$,

  $->$ $\forall n\in\mathbb{N},\quad \displaystyle\int \cos^{2n+1}(x)\,dx = \int (1-\sin^2 x)^n\cos(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int \sin^{2k}(x)\cos(x)\,dx$ par la formule du binôme

  On peut utiliser une approche analogue pour $\displaystyle\int \sin^{2n+1}(x)\int \mathrm{ch}^{2n+1}(x)\,dx,\ dx\int \mathrm{sh}^{2n+1}(x)\,dx$

  $->$ on peut linéariser $f(x)=\cos^p(x)\sin^q(x)$.
- Pour calculer une intégrale du type $\int \cos(ax)e^{bx}\,dx$ ou $\int \sin(ax)e^{bx}\,dx$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

  $->$ on utilise une exponentielle complexe : $\int\cos(ax)e^{bx}\,dx = \Re e\left(\int e^{(b+ia)x}\,dx\right) = \dots$
- Pour calculer une intégrale d'une fraction rationnelle $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$,

  $->$ on réalise la division du polynôme $P(x)$ par le polynôme $Q(x)$ si $\deg(P)\geqslant\deg(Q)$ puis on exprime le reste $R(x)$ de cette division en séparant les pôles de la fraction rationnelle (en procédant par exemple par identification des coefficients ou par limite aux pôles)

Exemple classique **Primitive usuelle de $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$**

Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}-\{-1,1\}$, une primitive sur I de f est donnée par $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

II.2) *Utiliser une intégration par parties*

Théorème **Intégration par parties**

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ dont les dérivées u' et v' sont continues sur $[a;b]$, *(On dit que u et v sont de classe C^1 sur $[a;b]$)*

alors $$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exemples classiques **Primitives usuelles de $\ln x$ et de $\arctan x$**

- Les primitives sur $]0;+\infty[$ du logarithme ln sont données par $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$ où $C\in\mathbb{R}$
- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de arctan est donnée par $\displaystyle\int\arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ où $C\in\mathbb{R}$

II.3) *Utiliser un changement de variable*

Théorème **Formule du changement de variable**

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et si φ est une fonction à valeurs dans I qui est dérivable sur $[a,b]$ à dérivée φ' continue sur $[a;b]$ (càd φ est de classe C^1 sur $[a;b]$),

alors $$\int_a^b f\circ\varphi(x)\times\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

En pratique : on pose $u=\varphi(x)$ $\begin{cases} x=a \Leftrightarrow u=\varphi(a)\\ x=b \Leftrightarrow u=\varphi(b)\end{cases}$ et $du=\varphi'(x)\,dx$

Point méthode **Pour le calcul de primitive de fonctions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$**

- Penser à exploiter la périodicité et les symétries (parités, etc...) de l'intégrande $f(x)dx$ (Régles de Bioche).
- Utiliser le changement de variable en $t=\tan\frac{x}{2}$ en dernier recours : $\cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x)=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan(x)=\dfrac{2t}{1-t^2}$ et $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$