

CHAP VII : GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU PLAN

Dans ce chapitre, on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan et $\mathbf{P}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

I) Mode de repérage dans le plan

DÉFINITION

Repère cartésien du plan

- Un repère cartésien du plan est un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où :
 - O est un point du plan qu'on appelle *l'origine du repère* ;
 - $(\vec{i}, \vec{j})$ est un couple de vecteurs du plan non colinéaires qu'on appelle *une base du plan*.
- Si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan, on dit que *le repère est orthogonal* si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux
- Si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan, on dit que *le repère est orthonormal* si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et unitaires soit $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- Si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan et si le plan est muni d'une orientation,
 - on dira que *le repère est orthonormal direct* si le sens de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ est le sens positif (ou direct).
 - on dira que *le repère est orthonormal indirect* si le sens de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ est le sens négatif (ou indirect).

THÉORÈME et DÉFINITION

Coordonnées dans un repère cartésien

- Si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan et si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, alors il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$: on dit que (x, y) sont les *coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$* et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- On dit que x est *l'abscisse* et que y est *l'ordonnée* du vecteur $\vec{u}$ (resp. du point M)
- Si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan et si M est un point du plan, alors l'unique couple (x, y) de réels, tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sont les *coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$* et on note $M(x; y)$

COROLLAIRE Si A a pour coordonnées (x_A, y_A) et B a pour coordonnées (x_B, y_B) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Rappels : Le barycentre G du système de n points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ existe lorsque $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

et il est donné par la relation vectorielle : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ On notera alors $G = \text{Bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$

De plus, on a l'équivalence : $G = \text{Bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\} \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{P}, \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$

POINT MÉTHODE Pour obtenir les relations entre les coordonnées (x, y) du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et ses coordonnées (X, Y) dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$, on écrit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ qu'on exprime en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ puis on identifie par unicité des coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

DÉFINITION

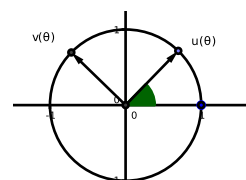
Repère polaire et coordonnées polaires

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Lorsque θ est un réel, on appelle *repère polaire attaché au réel θ* le repère $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ qui est l'image du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation d'angle θ dans le sens direct.

Le repère polaire $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est orthonormal direct et on a les relations : $\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$

- Si $M(x; y)$ est un point du plan, et si $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta)$ où $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ alors on dit le couple (r, θ) est un couple de *coordonnées polaires* de M .
Attention, les coordonnées polaires du points M existent toujours mais ne sont pas uniques !



II) Produit scalaire et déterminant

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'une orientation ce qui permet de définir la notion d'angle orienté de vecteurs.

DÉFINITIONS

Produit scalaire et déterminant dans le plan

- Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ qui vaut :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{sinon.}$$

- Le *déterminant* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ qui vaut :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{sinon.}$$

PROPOSITIONS

Interprétations géométriques du produit scalaire et du déterminant dans le plan

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, et si on appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$
- $|\det(\vec{u}; \vec{v})|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

PROPRIÉTÉS

Caractérisation de l'orthogonalité et de la colinéarité des vecteurs à l'aide du produit scalaire et du déterminant

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

PROPRIÉTÉS

Symétrie, antisymétrie et bilinéarité

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan,
 - * $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ on dit que le *produit scalaire est symétrique* ;
 - * $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$ on dit que le *déterminant est antisymétrique*.

- Si $\vec{u}, \vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont trois vecteurs du plan, et si α et β sont deux réels,

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \beta \det(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

On dit que $\vec{v} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v})$ sont des *applications linéaires*.

Par symétrie (resp. antisymétrie) on montre que $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ (resp. $\vec{u} \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v})$) est aussi linéaire.

- Le *produit scalaire* et le *déterminant* sont des *formes bilinéaires* car :
 - * les applications $\vec{v} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ sont toutes deux linéaires ;
 - * les applications $\vec{v} \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u} \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v})$ sont toutes deux linéaires.

PROPOSITIONS **Expression du produit scalaire et du déterminant dans une base orthonormée directe**

- Si le plan est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$, et si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs,

$$\text{alors} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

(égalité vraie si la base est seulement orthonormée)

Lorsque la base est quelconque, on a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \underbrace{\det(\vec{i}, \vec{j})}_{\neq 0}$

III) Droites et cercles dans le plan

Les représentations en coordonnées polaires des droites et des cercles seront étudiées dans le chapitre sur les courbes.

III.1) Les différentes représentations d'une droite dans le plan en coordonnées cartésiennes

PROPOSITIONS et POINT MÉTHODE

Différents modes de représentation d'une droite

- Lorsque le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

* on peut repérer la droite $\mathcal{D}$ par deux points A et B mais alors $\mathcal{D}$ passe par A et elle est dirigée par $\overrightarrow{AB}$

* on peut repérer la droite $\mathcal{D}$ par un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

- une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$$

- une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Réciproquement,

une équation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ représente une droite dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

- Lorsque le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal (direct),

* on peut repérer la droite par un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ou $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$

- une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est alors donné par :

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Réciproquement,

une équation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ représente une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- une équation normale de $\mathcal{D}$ est alors donné par :

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = 0 \Leftrightarrow x \cos \theta + y \sin \theta = p \text{ où } p = x_A \cos \theta + y_A \sin \theta$$

Réciproquement,

une équation du type $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ où $(\theta, p) \in \mathbb{R}^2$ représente une droite telle que $d(O, \mathcal{D}) = |p|$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

PROPOSITION

Distance d'un point à une droite

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la distance $d(M, \mathcal{D})$ séparant le point $M(x_M; y_M)$ de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$) est

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \left(= \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

DÉFINITION et PROPOSITION

Lignes de niveau d'une application scalaire

Si φ est une application scalaire c'est à dire une application définie sur le plan $\mathcal{P}$ et à valeurs réelles, alors la ligne de niveau de φ associée au réel k est le lieu $\mathcal{E}_k$ des points M tel que $\varphi(M) = k$: $\mathcal{E}_k = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \varphi(M) = k \right\}$

Si A est un point du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$ alors

- les lignes de niveaux de l'application $[M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}]$ sont des droites normales à $\vec{u}$
- les lignes de niveaux de l'application $[M \mapsto \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})]$ sont des droites dirigées par $\vec{u}$

III.2) Les différentes représentations d'un cercle dans le plan en coordonnées cartésiennes

PROPOSITIONS et POINT MÉTHODE

Différents modes de représentation d'un cercle

Lorsque le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct,

* on peut repérer $\mathcal{C}$ par son centre $\Omega(a; b)$ et son rayon R

- une *équation cartésienne* de $\mathcal{C}$ est alors donnée par :

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

- une *représentation paramétrique* de $\mathcal{C}$ est alors donnée par :

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$$

* on peut repérer $\mathcal{C}$ par son diamètre $[AB]$ où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

une *équation cartésienne* de $\mathcal{C}$ est alors donnée par :

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Réciproquement,

une équation $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ représente soit un cercle, soit un point soit $\emptyset$.

POINT MÉTHODE

Comment étudier l'intersection d'une droite et d'un cercle ?

Si $\mathcal{D}$ est une droite du plan et $\mathcal{C}$ est un cercle de centre Ω et de rayon R ,

on note H la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{D}$ alors l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ dépend de la distance $d(\Omega, \mathcal{D})$

- si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$;
- si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est réduite au point H et $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$
- si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est réduite à deux points A et B tels que $HA = HB = \sqrt{R^2 - d(\Omega, \mathcal{D})^2}$

POINT MÉTHODE

Comment étudier l'intersection de deux cercles ?

Si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{C}'$ est un cercle de centre Ω' et de rayon R'

- si $\Omega\Omega' > R + R'$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$: $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont extérieurs
- si $\Omega\Omega' = R + R'$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est réduit à un point : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement
- si $|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$ alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en deux points
- si $\Omega\Omega' = |R - R'|$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est réduit à un point : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents intérieurement
- si $\Omega\Omega' < |R - R'|$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$: l'un des cercles est intérieur à l'autre.

IV) Utilisations des nombres complexes en géométrie plane

DÉFINITION

Identification au plan complexe, notion d'affixe d'un point ou d'un vecteur

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{I}, \vec{J})$ ce qui permet de l'identifier au plan complexe. Le nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est alors associé

- soit au point M de coordonnées (x, y) dans $(O; \vec{I}, \vec{J})$
- soit au vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(\vec{I}, \vec{J})$

On dit que z est l'affixe du point M (resp. du vecteur $\vec{u}$) et on note $M(z)$ (resp. $\vec{u}(z)$)

PROPOSITION

Nombre complexe et repère polaire

Si M a pour affixe z dans $(O; \vec{I}, \vec{J})$ alors un couple de coordonnées polaires de M est $(|z|, \theta)$ où $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$

Si $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est le repère polaire attaché au réel θ alors $e^{i\theta}$ est l'affixe de $\vec{u}(\theta)$ et $ie^{i\theta}$ est l'affixe de $\vec{v}(\theta)$

PROPOSITION

Utilisation du module et de l'argument

Si A, B, C et D sont les points d'affixes respectives a, b, c et d dans le plan complexe et si r est un réel positif

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$, $AB = |b - a|$ et $(\vec{I}; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(b - a)[2\pi]$

- Si $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)[2\pi]$.

En particulier : - (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{d - c}{b - a} \in \mathbb{R}$

- (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{d - c}{b - a} \in i\mathbb{R}$

- On peut aussi traduire des lieux géométriques à l'aide des nombres complexes :
 - le cercle de centre A et de rayon r est $\{M(z) \mid |z - a| = r\}$
 - le disque ouvert (resp. fermé) de centre A et de rayon r est $\{M(z) \mid |z - a| < r\}$ (resp. $\{M(z) \mid |z - a| \leq r\}$)
 - la médiatrice du segment $[AB]$ est $\{M(z) \mid |z - a| = |z - b|\}$
 - la demi-droite $]OM_0)$ où M_0 est le point d'affixe $e^{i\theta_0}$ est $\{M(z) \mid \arg(z) \equiv \theta_0[2\pi]\}$

POINT MÉTHODE

Nature d'un triangle ABC

Pour étudier la nature du triangle ABC où A, B et C sont des points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c ,

on étudie le complexe $Z = \frac{b - a}{c - a}$

On a alors :
 - ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}$
 - ABC est isocèle en $A \Leftrightarrow |Z| = 1$ et ABC est isocèle rectangle en $A \Leftrightarrow Z = \pm i$
 - ABC est équilatéral $\Leftrightarrow Z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

PROPOSITION

Produit scalaire et déterminant avec les nombre complexes

Si z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ et z' celle du vecteur $\vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(\bar{z}z')$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{Im}(\bar{z}z')$

En particulier, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{z}z') = 0$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\bar{z}z') = 0$

PROPOSITION

Barycentre et nombres complexes

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n points du plan d'affixes respectives $z_1, z_2, \dots, z_n$ et si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

alors le barycentre G du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ a pour affixe $\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$

PROPOSITION

Transformations planes et nombres complexes

Soit f la transformation du plan complexe qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' ,

- f est la symétrie de centre $A(a)$ $\Leftrightarrow z' = -z + 2a$
- f est la symétrie d'axe $(O; \vec{I})$ (resp. $(O; \vec{J})$) $\Leftrightarrow z' = \bar{z}$ (resp. $z' = -\bar{z}$)
- f est la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha)$ $\Leftrightarrow z' = z + \alpha$
- f est l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ est de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$
- f est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ ($\theta \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
- f est la similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, de rapport $k > 0$ et d'angle θ ($\theta \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

***Cas de la transformation f du plan $[z \mapsto az + b]$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$
qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $az + b$***

- si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
- si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors f est une rotation d'angle un argument de a et de centre Ω seul point fixe de f :
 ω l'affixe de Ω est l'unique solution de $z = az + b$
- si $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de rapport $|a|$, d'angle un argument de a et de centre Ω
où Ω est le seul point fixe de f aussi ω l'affixe de Ω est l'unique solution de $z = az + b$

COROLLAIRE

La transformation f est une similitude directe $\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, \quad z' = az + b$