Chap VIII : Comparaison locale des fonctions Développements limités

I) Relations de comparaison entre les fonctions

Dans cette partie, a est un élément de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et I est un voisinage de a c'est à dire un intervalle de $\mathbb{R}$ du type :
- $]-\infty;A[$ avec $A\in\mathbb{R}$ lorsque $a=-\infty$;
- $]A;+\infty[$ avec $A\in\mathbb{R}$ lorsque $a=+\infty$;
- $]a-h,a+h[$ avec $h>0$ si $a\in\mathbb{R}$ et les fonction concernées sont définies à gauche et à droite de a
- $[a,a+h[$ (resp. $]a-h;a]$) avec $h>0$ si $a\in\mathbb{R}$ si les fonctions ne sont définies qu'à droite (resp. à gauche) de a

I.1) Fonction dominée ou fonction négligeable devant une autre, notation O et o

Définition — ***f est dominée par φ au voisinage de a***

Soit $[\varphi : I\to\mathbb{R}]$ une fonction réelle ne s'annulant pas sur I sauf peut être en a, on dit que la fonction $[f : I\to\mathbb{R}]$ est dominée par la fonction φ au voisinage de a lorsqu'il existe une application $[C : I\to\mathbb{R}]$ bornée sur I telle que : $\forall x\in I,\ f(x)=C(x)\varphi(x)$

On note $f=O_a(\varphi)$ ou $f(x)=O_a\big(\varphi(x)\big)$

Définition — ***f est négligeable devant φ au voisinage de a***

Soit $[\varphi : I\to\mathbb{R}]$ une fonction réelle ne s'annulant pas sur I sauf peut être en a, on dit qu la fonction $[f : I\to\mathbb{R}]$ est négligeable devant la fonction φ au voisinage de a lorsqu'il existe une application $[\varepsilon : I\to\mathbb{R}]$ telle que : $\forall x\in I,\ f(x)=\varepsilon(x)\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$

On note $f=o_a(\varphi)$ ou $f(x)=o_a\big(\varphi(x)\big)$

Ces définitions théoriques permettent de réaliser les preuves mais dans la pratique on utilise la caractérisation suivante :

Proposition — ***Caractérisation de o et O à l'aide du quotient $\frac{f}{\varphi}$***

$$f=O_a(\varphi)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{f}{\varphi}\text{ est bornée au voisinage de }a\\ \text{si } a\in I,\quad \varphi(a)=0\Rightarrow f(a)=0\end{cases}\qquad\text{et}\qquad f=o_a(\varphi)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{f}{\varphi}\xrightarrow[x\to a]{}0\\ \text{si } a\in I,\quad \varphi(a)=0\Rightarrow f(a)=0\end{cases}$$

Point méthode Pour comparer deux fonctions f et φ au voisinage de a, on étudie le quotient $\frac{f}{\varphi}$ et on essaye de montrer qu'il est borné au voisinage de a pour obtenir O_a ou qu'il tend vers 0 si x tend vers a pour obtenir o_a.

Proposition — ***Relation o et opérations***

- $\begin{cases}f=o_a(\varphi)\\ \lambda\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow \lambda f=o_a(\varphi)$
- $\begin{cases}f=o_a(\varphi)\\ g=o_a(\varphi)\end{cases}\Rightarrow (f+g)=o_a(\varphi)$
- $\begin{cases}f=o_a(\varphi)\\ g=o_a(\psi)\end{cases}\Rightarrow (fg)=o_a(\varphi\psi)$
- Si h est définie sur un voisinage J de $b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ à valeurs dans I alors $\begin{cases}f=o_a(\varphi)\\ h(x)\xrightarrow[x\to b]{}a\end{cases}\Rightarrow (f\circ h)=o_b(\varphi\circ h)$

Exemples de croissances comparées : Soit α, β et γ des nombres réels avec $\beta > 0$ et $\gamma > 0$,

Au voisinage de $+\infty$: $(\ln x)^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ et $x^\beta = o_{+\infty}(e^{\gamma x})$
Au voisinage de 0^+ : $(\ln x)^\alpha = o_{0^+}(x^{-\beta})$ et Au voisinage de $-\infty$: $e^{\gamma x} = o_{-\infty}(x^{-\beta})$

I.2) Equivalence entre deux fonctions, notation $\sim$

DÉFINITION ***f est équivalente à g au voisinage de a***

Soient $[f : I \to \mathbb{R}]$ et $[g : I \to \mathbb{R}]$ deux fonctions réelles ne s'annulant pas sur I sauf peut être en a, on dit que la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de a lorsqu'il existe une application $[\theta : I \to \mathbb{R}]$ telle que : $\forall x \in I,\ f(x) = \theta(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \theta(x) = 1$

On note alors $f \sim_a g$ ou $f(x) \sim_a g(x)$

On remarque que : $f \sim_a g \Leftrightarrow g \sim_a f$ et $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g)$

PROPOSITION ***Caractérisation de $\sim$ à l'aide du quotient $\frac{f}{\varphi}$***

$$f \sim_a \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \\ \text{si } a \in I, \quad \varphi(a) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \end{cases}$$

POINT MÉTHODE Pour montrer que $f \sim_a \varphi$,

on essaye de montrer que $\dfrac{f}{\varphi} \xrightarrow[x\to a]{} 1$

PROPOSITIONS ***Equivalents et signes***
Equivalents et limites

- Si $f \sim_a \varphi$ et si $\varphi(x) > 0$ au voisinage de a alors $f(x) > 0$ au voisinage de a.
- Si $f \sim_a \varphi$ et si φ possède en a une limite finie ou infinie alors f possède elle aussi une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$

PROPOSITION ***Obtention des équivalents usuels***

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$$

On a les équivalents usuels suivants :

$e^x - 1 \sim_0 x$ $\quad \ln(1 + x) \sim_0 x$

$\sin x \sim_0 x$ $\quad \text{sh } x \sim_0 x$

$\tan x \sim_0 x$ $\quad \text{th } x \sim_0 x$

$\arcsin x \sim_0 x$ $\quad \arctan x \sim_0 x$

$(1 + x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé)

Autres équivalents usuels :
$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)$ d'où $\text{ch } x \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}$
De même : $\text{sh } x \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}$, $\text{ch } x \sim_{-\infty} \frac{e^{-x}}{2}$ et $\text{sh } x \sim_{-\infty} -\frac{e^{-x}}{2}$

PROPOSITIONS ***Opérations sur les équivalents***

1) Si $f \sim_a \varphi$ et $\varphi \sim_a \psi$, alors $f \sim_a \psi$.

2) Si $f \sim_a \varphi$ et $g \sim_a \psi$ alors $fg \sim_a \varphi\psi$.

3) Si $f \sim_a \varphi$ et $g \sim_a \psi$ alors $\dfrac{f}{g} \sim_a \dfrac{\varphi}{\psi}$

4) Soient f et φ sont deux fonctions définies sur I et soit h une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans l'intervalle I,
si $f \sim_a \varphi$ et si $h(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$
alors $f\big(h(x)\big) \sim_b \varphi\big(h(x)\big)$
(Composition à l'intérieur ou changement de variables...)

A l'aide des relations de trigonométrie, on trouve :

$$1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch } x - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$$

Attention ! **Pas de somme !**
$f \sim_a \varphi$ et $g \sim_a \psi \not\Rightarrow f + g \sim_a \varphi + \psi$
et **Pas de composition à l'extérieur !**
$f \sim_a \varphi \not\Rightarrow h \circ f \sim_a h \circ \varphi$ en général...

II) Notion de développement limité

II-1) Développement limité au voisinage de 0

DÉFINITION ***Développement limité au voisinage de*** 0

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un voisinage de 0, la fonction $[f : I \to \mathbb{R}]$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 (en abrégé f admet un $DL_n(0)$)s'il existe $(n+1)$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

autrement dit : $$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

PROPOSITION ***Unicité du développement limité et partie régulière***

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction admettant un $DL_n(0)$ de sorte qu'il existe deux $(n+1)$-listes de réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$

tels que : $\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k x^k + o(x^n)$

alors $$(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$$

DÉFINITION On dit alors que la fonction polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est ***la partie régulière*** du $DL_n(0)$ de f.

COROLLAIRE ***DL d'ordre inférieur, troncature***

Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(0)$ donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

alors f admet un $DL_p(0)$ pour tout entier $p \leq n$

dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$

COROLLAIRE ***DL et parité***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un $DL_n(0)$

dont la partie régulière est $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

- si f est paire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires
- si f est impaire, alors $P(x)$ ne contient que des puissance impaires.

PROPOSITION Cas des $DL_0(0)$ et des $DL_1(0)$

$f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_0(0)$ si et seulement si f est continue en 0.

On a alors : $f(x) = f(0) + o(1)$

$f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0.

On a alors : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$

Attention ! Dès que $n \geq 2$, il est faux de penser que :

f admet un $DL_n(0) \not\Rightarrow f$ est n fois dérivable en 0 (voir Ex A-3)

On a, par contre, une "pseudo" réciproque avec la formule de Taylor-Young ci-après

II-2) Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

DÉFINITION ***Développement limité au voisinage de a***

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un voisinage du réel a,la fonction $[f : I \to \mathbb{R}]$ admet un développement limité à l'ordre n en a (en abrégé f admet un $DL_n(a)$) si la fonction $\Big[h \mapsto f(a+h)\Big]$ définie sur $I_0 = \{x - a | x \in I\}$ possède un $DL_n(0)$ c'est à dire qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $[\varepsilon : I_0 \to \mathbb{R}]$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ tels que :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + h^n \varepsilon(h) \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

THÉORÈME (admis) ***Formule de Taylor-Young***

Soient n un entier naturel et I voisinage de a, si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^n sur I, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par : $\forall x \in I, \quad f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_a\big((x-a)^n\big)$

Développements limités au voisinage de 0 des fonctions uselles

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^{2n+1})$
- $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^{2n+2})$
- $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + o(x^{2n+2})$
- $$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

POINT MÉTHODE Pour obtenir un $DL_n(a)$ de f, on peut :
- poser $h = x - a$ et chercher un $DL_n(0)$ de $\big[h \mapsto f(a+h)\big]$
- utiliser directement la formule de Taylor-Young sur f

II-3) Opérations sur les développements limités

Les résultats de cette partie sont énoncés pour des $DL(0)$ mais ils s'étendent aisément au $DL(a)$.

II.3.a) Somme et produit

PROPOSITION ***Somme et produit de DL***

Soient f et g admettant en 0 des développement limités à l'ordre n qui s'écrivent :

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

alors les fonctions $f+g$ et fg admettent en 0 des développements limités à l'ordre n qui s'écrivent :

$$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x)g(x) = R(x) + o(x^n)$$

où R est la fonction polynôme obtenue en ne gardant dans le produit $P \times Q$ que les termes de degré inférieur à n

Attention !
On ne peut pas obtenir de DL d'ordre strictement supérieur à n pour fg en partant de DL_n pour f et g

Si f admet un $DL_n(0)$ et g admet un $DL_m(0)$, alors on pourra calculer un DL de fg d'ordre au plus $\min(n,m)$

II.3.b) Composition et quotient

PROPOSITION ***DL de*** $\left[x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}\right]$ ***avec*** $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$

Si u est une fonction avec $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et qui admet un $DL_n(0)$, alors
la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}\right]$ admet elle aussi un $DL_n(0)$ obtenu en prenant un $DL_n(0)$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(u(x)\big)^k$.

PROPOSITION ***Développement limité de l'inverse d'une fonction et d'un quotient***

- Si f admet un $DL_n(0)$ et si elle ne s'annule pas en 0 alors $\dfrac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

POINT MÉTHODE il suffit d'écrire $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(0) + (f(x) - f(0))} = \dfrac{1}{f(0)} \times \dfrac{1}{1-u(x)}$ où $u(x) = 1 - \dfrac{f(x)}{f(0)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

- Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et si $g(0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$.

POINT MÉTHODE il suffit d'écrire $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$

Conséquence : Un $DL_6(0)$ de $\tan x$ est donné par : $\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)}$

POINT MÉTHODE Avant de démarrer les calculs, on réfléchit à l'ordre des DL usuels qu'il est nécessaire d'utiliser...
Il faut penser,par exemple, à utiliser les propriétés telles que la parité ou l'imparité de la fonction.

II.3.c) Intégration et dérivation des développements limités

THÉORÈME ***Intégration d'un développement limité***

Si $[f : I \to \mathbb{R}]$ est continue sur un voisinage I de 0 admettant un $DL_n(0)$ donné par : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

alors toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(0)$ donnée par : $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

Développements limités au voisinage de 0 de fonctions uselles obtenus par intégration

- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + o(x^n)$ et $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

- Les développements limités de $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{argsh} x$, $\operatorname{argch} x$ et $\operatorname{argth} x$ s'obtiennent en intégrant ceux de leurs dérivées.

Attention ! On ne peut pas dériver les développements limités...
$[f : I \to \mathbb{R}]$ **est dérivable et admet en** 0 **un** $DL_n(0) \not\Rightarrow f'$ **admet un** $DL_{n-1}(0)$ (voir contre-ex Ex A-3)

Mais :

POINT MÉTHODE : Si on sait que f admet un $DL_{n+1}(0)$ et f' admet un $DL_n(0)$ alors la partie régulière du $DL_n(0)$ de f' s'obtient en dérivant celle du $DL_{n+1}(0)$ de f

Applications : Calcul des DL de $\tan(x)$ ou de $\operatorname{th}(x)$ en $x = 0$

III) Applications à l'étude locale des courbes

III-1) Recherche d'équivalent, calcul de limites

POINT MÉTHODE : Si f admet un $DL_n(a)$ donné par $f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$
où $a_p \neq 0$ est le premier coefficient non nul alors $f(x) \sim_a a_p (x-a)^p$

III-2) Tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$

POINT MÉTHODE : Si f admet au voisinage de a un développement limité de la forme :
$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o\big((x-a)^p\big)$
alors l'équation de la tangente en a à la courbe $y = f(x)$ est $y = a_0 + a_1(x-a)$ et , au voisinage de a, la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$.

III-3) Asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$

POINT MÉTHODE : Si f admet au voisinage de $+\infty$ une écriture de la forme : $f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_{p+1}}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$
alors la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ est une asymptote oblique à la courbe $y = f(x)$ au voisinage de l'infini et la position au voisinage de l'infini de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_{p+1}}{x^p}$.