# Chap IX : Courbes planes paramétrées

Les courbes planes étudiées seront définies le plan euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

## *I) Courbes planes et équations*

Il y plusieurs façon de décrire une courbe $\Gamma$ dans le plan à l'aide des coordonnées des points qui la composent.
On parle de représentation de la courbe Gamma. Les représentations les plus utilisées sont données :

• soit par une équation cartésienne du type $F(x,y) = 0$ où $\Big[F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\Big]$
où $(x,y)$ sont les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$ des points de la courbe.
La courbe plane $\Gamma$ associée est alors : $\Gamma = \Big\{M(x,y) \;\Big|\; F(x,y) = 0\Big\}$ autrement dit $M(x,y) \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; F(x,y) = 0$
Exemples : - La courbe représentative d'une fonction $f$ est donnée par une équation cartésienne $y = f(x)$ soit $F(x,y) = y - f(x)$
- Une hyperbole de centre $O$ et d'asymptotes les axes du repère a pour équation $xy = k$

• soit par une équation polaire du type $G(\rho,\theta) = 0$ où $\Big[G : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\Big]$
où $(\rho,\theta)$ qui sont des coordonnées polaires dans $\mathcal{R}$ des points de la courbe.
La courbe plane $\Gamma$ associée est alors : $\Gamma = \Big\{M(\rho,\theta) \;\Big|\; G(\rho,\theta) = 0\Big\}$ autrement dit $M(\rho,\theta) \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; G(\rho,\theta) = 0$
Exemples : - Les coniques dont un foyer est l'origine $O$ du repère $\mathcal{R}$ sont données par une équation polaire $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$
(Il s'agit d'une ellipse si $e \in ]0,1[$,d'une parabole si $e = 1$,d'une hyperbole si $e > 1$ et $d = \frac{p}{e}$ est la distance à la directrice associée)

• soit par une représentation paramétrique en coordonnées cartésienne du type

$(x,y) = f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ où $\Big[f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\Big]$ est une fonction vectorielle avec : $\forall t \in I,\ f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$
où $(x,y)$ sont les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$ des points de la courbe
La courbe plane $\Gamma$ associée est $\Gamma = \Big\{M(x,y) \;\Big|\; \exists t \in I,\ (x,y) = f(t)\Big\}$ soit $M(x,y) \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; \exists t \in \mathbb{R},\ (x,y) = f(t)$

Exemples * La droite $\mathcal{D}$ qui passe par l'origine et qui est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ est telle que

$$\mathcal{D} = \underbrace{\Big\{M(x,y) \mid \sqrt{3}x - y = 0\Big\}}_{\text{représentation cartésienne}} = \underbrace{\Big\{M(\rho,\theta) \mid \theta = \frac{\pi}{3}\Big\}}_{\text{représentation polaire}} = \underbrace{\Big\{M(x,y) \mid \exists t \in \mathbb{R},\quad x = t \quad \text{et} \quad y = \sqrt{3}t\Big\}}_{\text{représentation paramétrique}}$$

* On peut décrire le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-3;4)$ et de rayon 5 par

$$\mathcal{C} = \Big\{M(x,y) \mid (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25\Big\} = \left\{M(x,y) \mid \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -3 + 5\cos(t) \\ y = 4 + 5\sin(t) \end{cases}\right\} = \underbrace{\Big\{M(\rho,\theta) \mid \rho = -6\cos\theta + 8\sin\theta\Big\}}_{\text{voir ci-dessous pour la preuve}}$$

Le choix du mode de représentation est le plus souvent lié aux spécificités géométriques de la courbe et passer d'une représentation à une autre n'est pas facile. Néanmoins, on peut retenir quer :

- On peut facilement passer d'une équation cartésienne à une équation polaire en utilisant $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$
Par contre, la réciproque est plus délicate car on a vu qu'il n'est pas toujours facile d'exprimer $\rho$ et $\theta$ à l'aide de $x$ et $y$

Exemple : Soit $M$ de coordonnées cartésienne $(x,y)$ et de coordonnées polaires $(\rho,\theta)$ dans $\mathcal{R}$ avec $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25 \;\Leftrightarrow\; (\rho\cos\theta + 3)^2 + (\rho\sin\theta - 4)^2 = 25 \quad &\Leftrightarrow \quad \rho(\rho + 6\cos\theta - 8\sin\theta) = 0 \quad \text{en développant} \\ &\Leftrightarrow \quad \rho = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = -6\cos\theta + 8\sin\theta \\ &\Leftrightarrow \quad \rho = -6\cos\theta + 8\sin\theta \quad \rho = 0 \text{ est un cas particulier obtenu pour } \theta_0 = \arctan\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

- On peut passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne (ou à une équation polaire) en "éliminant" le paramètre $t$.
- On peut obtenir une représentation paramétrique à partir d'une équation cartésienne en choisissant pour paramètre $t$ :
  - l'une des coordonnées Exemple : La parabole d'équation $y^2 = 2px$ est le support de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
  - le quotient $t = \frac{y}{x}$ ce qui revient à écrire $\Gamma = \{\Gamma \cap D_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ où $D_t$ est la droite issue de $O$ de pente $t$

On peut donc être amener à étudier les courbes dans chacun de ces types de représentation :
- L'étude générale d'une courbe donnée par une équation cartésienne n'est pas vraiment au programme mis à part le cas très particulier des courbes représentatives : $\mathcal{C}_f = \{M(x,y) | y - f(x) = 0\} = \{M(x,y) \exists t \in \mathcal{D}_f,\ x = t \text{ et } y = f(t)\}$
- Seule l'étude générale des courbes données par une équation polaire du type $\rho = f(\theta)$ est au programme (cf. chap XV)
- L'étude des représentations paramétriques dans le cas général est le coeur de ce chapitre.

## II) Notion d'arcs paramétrés

### II.1) Quelques définitions et mises en garde pour commencer...

DÉFINITION — ***Arc paramétré et support de l'arc***

- Un arc paramétré $(I, f)$ est une application $[f : t \mapsto M_t]$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans le plan $\mathcal{P}$.
- Le support de l'arc paramétrée $(I, f)$ est une courbe plane qui est l'image de $I$ par $f$ : $f(I) = \{M_t \mid t \in I\}$

***Attention !*** On dit aussi (et le plus souvent) ***courbe paramétrée*** $(I, f)$ au lieu d'arc paramétré même si cette formulation est doublement malheureuse car

- il ne faut pas confondre courbe paramétrée et courbe représentative...

  La courbe représentative de la fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est le support de la courbe paramétrée $\left[\begin{array}{ccc} I & \to & \mathcal{P} \\ t & \mapsto & \big(t, \varphi(t)\big) \end{array}\right]$ mais il existe des courbes paramétrées dont le support ne peut être le graphe d'une fonction...

  Par exemple, $[t \mapsto (\cos t, \sin t)]$ pour $t \in [0, 2\pi]$ a pour support le cercle unité du plan...

- il ne faut pas confondre la courbe (ou l'arc) paramétrée avec la courbe plane qui est son support .

  La courbe paramétrée ne se résume pas à son support. Il peut exister différents ***paramétrages*** d'un même support...

  Par exemple, $[t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))]$ pour $t \in [0, \pi]$ est un autre paramétrage du cercle unité.

| | |
|---|---|
| ***Interprétation cinématique*** | Une courbe paramétrée $(I, f)$ représente ***le mouvement d'un point mobile.*** Sur l'intervalle de temps $I$, $M_t = f(t)$ est la position du point à l'instant $t$. Le support de l'arc correspond donc à la ***trajectoire*** du mouvement. |

### II.2) Arcs paramétrés et fonctions vectorielles

PROPOSITION — ***Lien entre arc paramétré et fonction vectorielle***

- Puisque le plan euclidien est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, l'étude d'une courbe paramétrée $(I, f)$ se ramène à l'étude d'une fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rccl} \overrightarrow{f} : & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \overrightarrow{OM_t} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}\right]$

  où $(x(t); y(t))$ sont les coordonnées du point $M_t$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

DÉFINITION — ***Applications composantes ou coordonnées***

- Les deux applications $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont alors appelées applications coordonnées (ou applications composantes) de l'application vectorielle $\overrightarrow{f}$ (ou de l'arc paramétré $(I, f)$).

La courbe paramétrée $(I, f)$ est alors souvent noté, par abus de langage, $\left[\begin{array}{rccl} f : & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \big(x(t); y(t)\big) \end{array}\right]$

et, le plus souvent, elle est donnée sous la forme $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right.$ où $x$ et $y$ sont des fonctions connues de $I$ dans $\mathbb{R}$ .

Exemple Tracer la cardioïde à la calculatrice donnée par $x(t) = \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$ et $y(t) = \dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$

(Mode PAR, prendre les valeurs $-10 \leq t \leq 10$, $-1 \leq x \leq 2$ et $-2 \leq y \leq 2$ pour la fenêtre)

DÉFINITIONS **_A propos des fonctions vectorielles_**

Soit $\left[\overrightarrow{f} : \quad I \to \mathbb{R}^2\right]$ une fonction vectorielle avec $\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

*(Limite)* $->$ Si $t_0 \in I$ et $\overrightarrow{l}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on dit que

$\overrightarrow{f}$ tend vers $\overrightarrow{l}$ lorsque $t$ tend vers $t_0$ noté $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{l}$ lorsque $\left\| \overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{l} \right\| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$

Il est clair que : $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{l} \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$

*(Continuité)* $->$ Si $t_0 \in I$, $\overrightarrow{f}$ est continue en $t_0$ lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(t_0)$

autrement dit : $\overrightarrow{f}$ est continue en $t_0 \Leftrightarrow$ Les composantes $x$ et $y$ sont continues en $t_0$

*(Dérivabilité)* $->$ Si $t_0 \in I$, $\overrightarrow{f}$ est dérivable en $t_0$ lorsque $\dfrac{\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0)}{t - t_0}$ admet une limite si $t$ tend vers $t_0$

autrement dit : $\overrightarrow{f}$ est dérivable en $t_0 \Leftrightarrow$ Les composantes $x$ et $y$ sont dérivables en $t_0$

On note $\overrightarrow{f}'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0)}{t - t_0}$ le vecteur dérivée de $\overrightarrow{f}$ en $t_0$ et on a $\overrightarrow{f}'(t_0)\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$

*(Classe $C^k$)* $->$ On dit que $\overrightarrow{f}$ est de classe $C^k$ où $k \in \mathbb{N}$ sur $I$ lorsqu'elle est $k$ fois dérivable sur $I$ et si la dérivée $k^{ime}$ de $\overrightarrow{f}$ est une fonction vectorielle continue sur $I$.

soit : $\overrightarrow{f}$ est de classe $C^k$ sur $I \Leftrightarrow$ Les composantes $x$ et $y$ sont $k$ fois dérivables sur $I$ et les dérivées $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$sont continues sur $I$

*(Classe $C^\infty$)* $->$ On dit que $\overrightarrow{f}$ est de classe $C^\infty$ sur $I$ lorsqu'elle est indéfiniment dérivable sur $I$

soit : $\overrightarrow{f}$ est de classe $C^k$ sur $I \Leftrightarrow$ Les composantes $x$ et $y$ sont indéfiniment dérivables sur $I$

PROPOSITIONS **_Quelques dérivées classiques sur les fonctions vectorielles_**

• *Fonctions vectorielles associées au repère polaire*

Les fonctions $\left[\theta \mapsto \overrightarrow{u}(\theta)\right]$ où $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\left[\theta \mapsto \overrightarrow{v}(\theta)\right]$ où $\overrightarrow{v}(\theta) = \overrightarrow{u}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$

sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{d\overrightarrow{u}}{d\theta}(\theta) = \overrightarrow{v}(\theta)$ et $\dfrac{d\overrightarrow{v}}{d\theta}(\theta) = -\overrightarrow{u}(\theta)$

Soient $\left[\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^2\right]$ et $\left[\overrightarrow{g} : I \to \mathbb{R}^2\right]$ deux fonctions vectorielles dérivables sur l'intervalle $I$, alors

• la fonction réelle $\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g} : t \mapsto \overrightarrow{f}(t).\overrightarrow{g}(t)$ est dérivable sur $I$ et : $\left(\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}\right)' = \overrightarrow{f}'.\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}'$

• la fonction réelle $\det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}) : t \mapsto \det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t))$ est dérivable sur $I$ et :

$$\left(\det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right)\right)' = \det\left(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}\right) + \det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g'}\right)$$

• la fonction réelle $\|\overrightarrow{f}\| : t \mapsto \|\overrightarrow{f}(t)\|$ est dérivable en $t_0 \in I$ lorsque $\overrightarrow{f}(t_0) \neq 0$ et : $\left(\|\overrightarrow{f}\|\right)'(t_0) = \dfrac{\overrightarrow{f}(t_0).\overrightarrow{f}'(t_0)}{\|\overrightarrow{f}(t_0)\|}$

***Retour sur l'interprétation cinématique***

Si $M_t = f(t)$ représente la position d'un point mobile à l'instant $t$ alors :

- le vecteur $\overrightarrow{f}'(t)$ est le vecteur vitesse du point $M_t$ à l'instant $t$
- le vecteur $\overrightarrow{f}''(t)$ est le vecteur accélération du point $M_t$ à l'instant $t$

## *III) Etude locale d'un arc paramétré*

### *III.1) Points multiples*

DÉFINITIONS ***Points simples, points multiples***

Si $(I, f)$ est un arc paramétré et si $M_0 \in f(I)$ est un point du support de l'arc, on dit que
- $M_0$ est un point simple s'il existe un unique réel $t_0$ dans $I$ tel que $f(t_0) = M_0$
- $M_0$ est un point double s'il existe exactement deux réels distincts $t_1$ et $t_2$ dans $I$ tels que $f(t_1) = f(t_2) = M_0$
  METHODE Penser à factoriser les équations par $(t_1 - t_2)$ puis à utiliser les variables $S = t_1 + t_2$ et $P = t_1 t_2$ pour la résolution
- $M_0$ est un point multiple d'ordre $n$ s'il existe exactement $n$ réels distincts $t_1, t_2, \ldots, t_n$ avec $f(t_i) = M_0$ si $1 \leq i \leq n$

### *III.2) Tangente en un point*

DÉFINITIONS ***Tangente en un point d'un arc paramétré***

Si $(I, f)$ est un arc paramétré et si $t_0 \in I$, on appelle $M_{t_0} = f(t_0)$ le point du support correspondant.
- L'arc $(I, f)$ admet une tangente en $M_{t_0}$ si la droite $(M_{t_0}M_t)$ admet une position limite lorsque $t$ tend vers $t_0$.
  autrement dit s'il existe un vecteur directeur $\overrightarrow{v}(t)$ de la droite $(M_{t_0}M_t)$ qui possède une limite $\overrightarrow{u}$ non nulle lorsque $t$ tend vers $t_0$.
- La droite qui passe par $M_{t_0}$ et qui est dirigée par $\overrightarrow{u}$ est alors la tangente à l'arc $(I, f)$ au point $M_{t_0}$.
- Si la droite $(M_{t_0}M_t)$ possède des limites non nulles à droite et à gauche lorsque $t$ tend vers $t_0$, on dit que l'arc admet des demi-tangentes qui seront les demi-droites issues de $M_{t_0}$ et dirigées par ces limites.

DÉFINITION ***Points réguliers, points singuliers (ou stationnaires)***

Si $(I, f)$ est un arc paramétré de classe $C^1$ et si $t_0$ est un réel de l'intervalle $I$, on dit que
le point $M_{t_0} = f(t_0)$ est un point singulier de l'arc lorsque $f'(t_0) = 0$ sinon c'est un point régulier de l'arc

***Quelques situations où l'on peut déterminer la tangente...***

PROPOSITION ***Tangente en un point régulier de l'arc***

Si $M_{t_0}$ est un point régulier de l'arc paramétré $(I, f)$ alors
l'arc paramétré $(I, f)$ admet une tangente au point $M_{t_0}$ qui est dirigée par le vecteur $f'(t_0)$

THÉORÈME ***Tangente en un point d'un arc de classe $C^k$***

Si $(I, f)$ est un arc paramétré de classe $C^k$ et si $t_0$ est un réel de l'intervalle $I$ tels que
il y a au moins une dérivée non nulle en $t_0$ dans la suite des dérivées successives $f^{(p)}$ de $f$ pour $1 \leq p \leq k$
autrement dit l'ensemble $\left\{p \mid 1 \leq p \leq k \quad \text{et} \quad f^{(p)}(t_0) \neq 0\right\} \neq \emptyset$
alors la droite passant par $M_{t_0}$ dirigé par le vecteur $f^{(p_0)}(t_0)$ est la tangente à l'arc $(I, f)$ au point $M_{t_0}$
où $p_0$ le plus petit entier non nul $p$ tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ c'est à dire $p_0 = \min\left\{p \mid 1 \leq p \leq k \quad \text{et} \quad f^{(p)}(t_0) \neq 0\right\}$

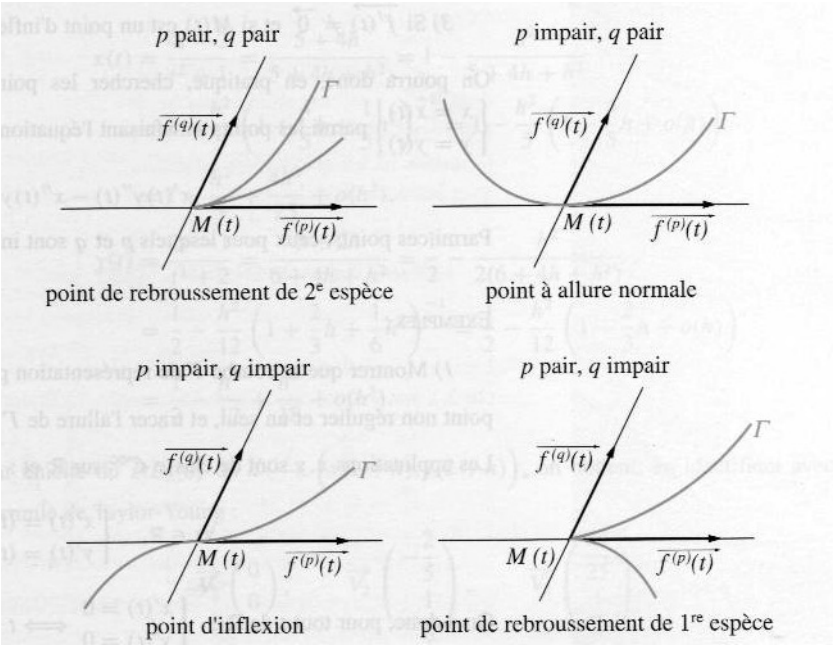
PROPOSITION ***Tangente obtenue par limite des pentes***

Si $(I, f)$ est un arc paramétré avec $f(t) = (x(t), y(t))$et si $t_0$ est un réel de l'intervalle $I$
tels que la limite $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existe
alors la courbe paramétrée $(I, f)$ admet une tangente au point $M_{t_0}$ | qui a pour pente $m$ si $m \in \mathbb{R}$ | qui est parallèle à l'axe $(O; \vec{j})$ si $m = \pm\infty$

DÉFINITION ***Points ordinaires, points d'inflexion et points de rebroussement***

On considère un arc paramétré $(I, f)$ et $t_0$ un réel de l'intervalle $I$.
On suppose que l'arc $(I, f)$ est de classe suffisamment grande pour qu'on puisse définir :
- $p$ le plus petit entier non nul tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$
- $q$ le plus petit entier plus grand que $p$ tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$

Au voisinage de $M_{t_0} = f(t_0)$ la courbe paramétrée a l'allure suivante selon les parités de $p$ et $q$ :




Remarque Les paramètres des points d'inflexion de la courbe lorsqu'ils existent sont à rechercher parmi les solutions de l'équation $\det\Big(f'(t), f''(t)\Big) = 0$

DÉFINITION ***Points limites***

On considère un arc paramétré $(I, f)$ où $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une extrémité de $I$ qui n'est pas dans $I$.
Si $\lim\limits_{t\to a} x(t) = \alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que $A(\alpha, \beta)$ est un point limite de l'arc.
On peut alors ≪ prolonger ≫ l'arc en $a$ et étudier l'existence d'une tangente ou de demi-tangentes en $A$.
(en regardant si $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)-\beta}{x(t)-\alpha}$ existe ou en utilisant un DL ou un développement asymptotique en $a$ par exemple)

*III.3) Etude asymptotique*

DÉFINITIONS ***Branche infinie, asymptote***

On considère un arc paramétré $(I, f)$ où $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une extrémité de $I$ qui n'est pas dans $I$.
Si $\lim\limits_{t\to a} x(t) = \pm\infty$ ou si $\lim\limits_{t\to a} y(t) = \pm\infty$ alors l'arc possède une branche infinie.

*Il y a une branche infinie lorsque $\|\overrightarrow{OM_t}\| \to +\infty$ ( intuitivement lorsque le point $M_t$ part à l'infini).*

-lorsque $\lim\limits_{t\to a} x(t) = \pm\infty$ mais $\lim\limits_{t\to a} y(t) = \beta \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = \beta$ est asymptote horizontale à la courbe

-lorsque $\lim\limits_{t\to a} y(t) = \pm\infty$ mais $\lim\limits_{t\to a} x(t) = \alpha \in \mathbb{R}$, alors la droite $x = \alpha$ est asymptote verticale à la courbe

-lorsque $\lim\limits_{t\to a} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t) = \pm\infty$, il faut étudier la limite $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)}{x(t)}$

$->$ si cette limite existe et vaut $\pm\infty$ alors la courbe a une branche parabolique dans la direction $(O; \vec{j})$

$->$ si cette limite existe et vaut 0 alors la courbe a une branche parabolique dans la direction $(O; \vec{i})$

$->$ si cette limite existe et vaut $m \in \mathbb{R}^*$ alors on étudie la limite $\lim\limits_{t\to a} \big(y(t) - mx(t)\big)$

$\sim$ lorsque la limite existe et vaut $\pm\infty$ alors la courbe a une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = mx$

$\sim$ lorsque la limite existe et vaut $p \in \mathbb{R}$ alors la courbe a une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$

## *IV) Etude globale d'une courbe paramétrée*

### *IV.1) Domaine de définition, domaine d'étude*

DÉFINITION — ***Domaine de définition***

Dans la pratique, la courbe paramétrée est donnée directement sous la forme $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Le domaine de définition de la courbe est $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$
où $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$ sont respectivements les domaines de définition des fonctions coordonnées $x$ et $y$.

POINT MÉTHODE — ***Déterminer un domaine d'étude***

Pour obtenir le tracé de $\Gamma$ de la courbe paramétrée, il n'est pas toujours nécessaire d'étudier $f$ sur la totalité de $\mathcal{D}_f$
On peut exploiter les propriétés géométriques du support pour restreindre l'étude à un domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_f$
On utilise alors un changement de paramètre $\Big[\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_f\Big]$ de sorte que $\mathcal{D} \cup \varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_f$.

Typiquement, il s'agira généralement des changements de paramètre :

$->\Big[\varphi : t \mapsto t + T\Big]$ pour exploiter la $T$périodicité de $x$ et $y$ conduisant à un domaine d'étude d'amplitude $T$

$->\Big[\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}\Big]$ lorsque le domaine de définition est du type $\mathcal{D}_f = ]a, b[ \cup \Big]\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}\Big[$ réduisant ainsi l'étude à $]a, b[$

$->\Big[\varphi : t \mapsto -t\Big]$ pour exploiter la parité ou l'imparité de $x$ et $y$

$->\Big[\varphi : t \mapsto \pi - t\Big]$, $\Big[\varphi : t \mapsto \dfrac{\pi}{2} - t\Big]$, $\Big[\varphi : t \mapsto \dfrac{\pi}{2} + t\Big]$, etc si $x$ et $y$ sont construites à partir de fonctions trigonométriques.

En notant $M_t$ le point de paramètre $t$,
$\Gamma = \big\{M_t \;\big|\; t \in \mathcal{D}\big\}$ la portion du support associé à $\mathcal{D}$ et $\Gamma' = \big\{M_{\varphi(t)} \;\big|\; t \in \mathcal{D}\big\}$ la portion du support associé à $\varphi(\mathcal{D})$ :

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$ donc les points $M_{\varphi(t)}$ et $M_t$ sont confondus : $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont confondus.

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) + \alpha \\ y(\varphi(t)) = y(t) + \beta \end{cases}$ donc $M_{\varphi(t)}$ est l'image de $M_t$ par une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$
et on obtient $\Gamma'$ à partir de $\Gamma$ en prenant l'image par $t_{\overrightarrow{u}}$ de $\Gamma$

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$ donc $M_{\varphi(t)}$ est l'image de $M_t$ par la symétrie $s_{(O;\vec{j})}$ par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$
et on obtient $\Gamma'$ à partir de $\Gamma$ en prenant l'image par $s_{(O;\vec{j})}$ de $\Gamma$

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ donc $M_{\varphi(t)}$ est l'image de $M_t$ par la symétrie $s_{(O;\vec{i})}$ par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$
et on obtient $\Gamma'$ à partir de $\Gamma$ en prenant l'image par $s_{(O;\vec{i})}$ de $\Gamma$

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ donc $M_{\varphi(t)}$ est l'image de $M_t$ par la symétrie $s_O$ de centre $O$
et on obtient $\Gamma'$ à partir de $\Gamma$ en prenant l'image par $s_O$ de $\Gamma$

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$ donc $M_{\varphi(t)}$ est l'image de $M_t$ par la symétrie $s_\Delta$ par rapport à l'axe $\Delta : y = x$ (1ere bissectrice)
et on obtient $\Gamma'$ à partir de $\Gamma$ en prenant l'image par $s_\Delta$ de $\Gamma$

Dans tous les cas,
***il faut bien préciser le nouveau domaine d'étude et la transformation géométrique associée !***

*IV.2) Plan d'étude d'une courbe paramétrée*

Point méthode **Plan d'étude d'une courbe paramétrée**

1° ) On détermine le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ s'il n'est pas donné puis le domaine d'étude $\mathcal{D}$.
On précise clairement les transformations géométrique qui conduisent du tracé sur $\mathcal{D}$ à celui sur $\mathcal{D}_f$

2° ) On étudie les variations de $x$ et $y$ sur $\mathcal{D}$ qu'on résume dans un tableau de variations commun.
On justifie les valeurs remarquables placées dans le tableau
(zéros de $x'$ et $y'$, valeurs ou limites aux bornes de $\mathcal{D}$ pour $x$, $y$, $x'$ et $y'$)

*A ce stade de l'étude, on peut repérer sur le tableau*
*les points à tangente horizontale (resp. verticale) où $y'$ s'annule mais pas $x'$ (resp où $x'$ s'annule mais pas $y'$)*
*les points singuliers où $x'$ et $y'$ s'annulent en même temps*
*les points limites lorsque $x$ et $y$ admettent une limite finie en une extrémité non incluse du domaine d'étude*
*les branches infinies à étudier lorsque l'une (au moins) des coordonnées $x$ ou $y$ tend vers $\pm\infty$*

3° ) On étudie les branches infinies.
On précise la position de la courbe par rapport aux éventuelles asymptotes.

4° ) On étudie les points limites et on précise les tangentes aux éventuels aux points limites.

5° ) On détermine la tangente et on précise l'allure de la courbe au niveau des points singuliers.
(allure normal, point d'inflexion, point de rebroussement de première espèce, de seconde espèce)

6° ) On trace l'allure de la courbe en insistant sur les éléments caractéristiques dégagés dans l'étude.
*On peut indiquer sur le tracé le $\ll$ mouvement $\gg$ dans le sens croissant du paramètre...*

*En général, l'étude s'arrête là. Mais, lorsqu'on a le temps ou si l'énoncé le demande, on peut aussi*

7° ) Chercher les points multiples et préciser certaines tangentes.