Vocabulaire relatif aux ensembles

• *La notion d'ensemble*

La notion d'***ensemble mathématique*** est intuitive et on ne cherchera pas à la définir cette année de façon précise.
Pour nous, un ensemble est un regroupement d'objets de même nature. Il s'agira le plus souvent d'objets mathématiques (des nombres, des points, des vecteurs, des fonctions, des suites, etc...)

Ex : $\mathbb{R}_+$ est un ensemble de réels
Une droite ou un plan de l'espace est un ensemble de points
$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Les objets constituant un ensemble sont appelés les ***éléments de l'ensemble***.
On peut définir un ensemble :
-en énumérant les éléments qui le construisent. On écrit alors ces éléments entre accolades { }

Ex : $E = \{-1, 1+i, 2i\}$, $F = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $G = \{\text{bleu}, \text{rouge}, \text{vert}\}$

- à l'aide de relations (le plus souvent des équations) qui permettent d'identifier les éléments de l'ensemble.

Ex : $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nul
Une droite ou un plan de l'espace sont caractérisés dans un repère par une ou des équations
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ d'une équation $az^2 + bz + c = 0$ est un ensemble de nombres complexes
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ est un ensemble de fonctions
L'ensemble des solutions d'un système d'équations d'inconnues x, y et z est un ensemble de triplet de reéls.

Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément est ***un singleton*** .
Il ne faut pas confondre l'élément x avec l'ensemble $\{x\}$ qui est l'ensemble contenant l'objet x.

Ex : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ et } x \leq 0\} = \{0\}$

L'ensemble vide est un ensemble qui ne contient aucun élément. Par convention, on le note toujours $\emptyset$ quel que soit le type des objets considérés Ex : $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ et } x > 0\} = \emptyset$ $\{M(z) \mid \Re e(z) = -3\} \cap \{M(z) \mid |z| = 2\} = \emptyset$

• *Les symboles $\in$ et $\subset$*

Le symbole $\in$ permet de caractériser l'appartenance d'un objet d'un type donné à un ensemble d'objet de ce type.
Si E est un ensemble d'objet d'un certain type et x est un objet de ce type, il y a alors deux éventualités :
soit $x \in E$ lorsque x appartient à E c'est à dire que x est un des éléments de E
soit $x \notin E$ lorsque x n'appartient pas à E c'est à dire que x n'est pas un élément de E

Le symbole $\subset$ permet de comparer des ensembles d'objets d'un même type. En logique mathématique :

$$A \subset E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A, \quad x \in E$$

ce qui se traduit par : " A est inclus dans E si et seulement si tous les éléments de A sont des éléments de E "
On a clairement : $E \subset E$
Plus subtilement, on a toujours : $\emptyset \subset E$
Pour visualiser ces notions abstraites, on s'aide souvent de dessins.
Les ensembles sont représentés par des "patates"
et les éléments par des petites croix.

Démontrer l'égalité de deux ensembles E et F, c'est prouver qu'ils ont les mêmes éléments autrement dit c'est démontrer que tous les éléments de E sont dans F et que tous les éléments de F sont dans E ce qu'on traduit en logique par :

$$\boxed{E = F \quad \Leftrightarrow \quad E \subset F \text{ et } F \subset E}$$

Prouver l'égalité $E = F$ revient donc à démontrer deux inclusions : c'est le ***raisonnement par double inclusion***.

Ex : $5 \in \mathbb{N}$ mais $\{5\} \subset \mathbb{N}$
Si M est un point, $\mathcal{D}$ est une droite et $\mathcal{P}$ est un plan de l'espace, on peut écrire
- $M \in \mathcal{D}$ ou $M \in \mathcal{P}$ mais $\mathcal{D} \in \mathcal{P}$ n'a pas de sens
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ ou $\{M\} \subset \mathcal{D}$ mais $\{M\} \in \mathcal{D}$ n'a pas de sens

La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ peuvent se rencontrer selon
- la droite $\mathcal{D}$ et on a alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \ldots\ldots\ldots$
- un point M et on a alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \ldots\ldots\ldots$
- ne pas se rencontrer et on a alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \ldots\ldots\ldots$

Si $A \subset E$, on dit que A ***est un sous-ensemble de*** E ou bien que A ***est une partie de*** E
On note $\mathcal{P}(E)$ ***l'ensemble des parties de*** E c'est à dire l'ensemble des sous-ensemble de l'ensemble E.
$\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensembles : $A \in \mathcal{P}(E) \quad \Leftrightarrow \quad A \subset E$ et $\mathcal{P}(E)$ contient toujours les éléments $\emptyset$ et E.

Ex : Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\Big\}$ Remarquons que $\mathcal{P}(\emptyset) = \ldots\ldots$

• ***Diverses opérations et notations sur les ensembles***

On va construire des ensembles plus complexes à l'aide d'opérations simples sur les ensembles de bases.
L'objectif est de bien comprendre en français l'opération, de pouvoir la traduire en dessin "patates" quand c'est possible car cela sera utile pour les preuves, et surtout de pouvoir la traduire en language logique car ce sera le coeur des preuves.

1) Si A et B sont des parties d'un ensemble E (autrement dit les éléments de A et B sont de même nature), alors :

∗ ***Le complémentaire de*** A qu'on note $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A

$$\boxed{\forall x \in E, \quad x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A}$$

Ex : Si $E = \mathbb{R}$, $\overline{\{0\}} = \dots\dots\dots$ et $\overline{\mathbb{R}_+} = \dots\dots\dots$
Si E est le segment $[AB]$ où A et B sont deux points de l'espace,
alors $\overline{\{A, B\}}$ est $\dots\dots\dots$

Il est alors évident que $\boxed{\overline{\overline{A}} = A}$

∗ ***L'intersection de*** A ***et*** B qu'on note $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B

$$\boxed{\forall x \in E, \quad x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ et } x \in B}$$

Ex : Si $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \dots\dots\dots$
Si E est la droite (AB) avec A, B et C des points distincts de l'espace
et qui sont alignés dans cet ordre, alors $[AB] \cap [BC) = \dots\dots\dots$
où $[BC)$ est la demi-droite issue de B qui contient C et B

Il est clair que : $\boxed{A \cap B = B \cap A}$
Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A ***et*** B ***sont disjoints***

∗ ***La réunion de*** A ***et*** B qu'on note $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B

$$\boxed{\forall x \in E, \quad x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ ou } x \in B}$$

Ex : $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \dots\dots\dots$
$\{1 + i, i\} \cap \mathbb{U}_4 = \dots\dots\dots$ et $\{1 + i, i\} \cup \mathbb{U}_4 = \dots\dots\dots$

Il est clair que : $\boxed{A \cup B = B \cup A}$

∗ ***La différence*** A ***privé de*** B qu'on note $A - B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A mais pas dans B

$$\boxed{\forall x \in E, \quad x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ et } x \notin B}$$

Ex : $\mathbb{R}_+ - \mathbb{R}_- = \dots\dots\dots$
Si $E = (AB)$ avec A, B et C des points distincts de l'espace
et qui sont alignés dans cet ordre, alors $[AC) -]BC) = \dots\dots\dots$

On a aussi clairement : $\boxed{A - B = A \cap \overline{B}}$ et $\boxed{\overline{A} = E - A}$

De manière plus générale encore, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E indexées par l'ensemble quelconque I
on peut définir : $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ et $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$

Ex : Si $\mathcal{D}_m$ est la droite qui passe par O et de pente m dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan alors
$\displaystyle\bigcap_{m \in \mathbb{R}_+^*} \mathcal{D}_m = \dots\dots\dots$ et $\displaystyle\bigcup_{m \in \mathbb{R}_+^*} \mathcal{D}_m$ est $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2) Si A et B sont des ensembles quelconques (les éléments de A et B ne sont donc pas forcément de même nature)

∗ ***Le produit cartésien de*** A ***par*** B qu'on note $A \times B$
C'est un ensemble de couple (x, y) où x est un élément de A et y est un élément de B autrement dit :

$$\boxed{(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ et } y \in B}$$

Bien évidemment, si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $A \times B$: $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$
Ex : $(\sqrt{2}, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $(\sqrt{2}, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $(\sqrt{2}, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ mais $(\sqrt{2}, 2) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$
Attention, $(\sqrt{2}, 2) \neq (2, \sqrt{2})$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Le plus souvent, on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$,etc...