

Construction d'espaces vectoriels

Rappel :

DÉFINITION : $(E, +, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel noté $\mathbb{K}ev$ lorsque :

- 1) $(E, +)$ est un groupe commutatif (d'élément neutre 0_E)
- 2) $\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{K} : \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array} \right]$ est une loi externe à opérateurs dans le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ (d'élément neutre 0 et 1)
- 3) on a les liens suivants entre la loi $\mathbb{K}$. et les autres lois :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ (avec } + \text{ de } (E, +)) : & \gamma) \text{ (avec } \times \text{ du corps)} : \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, & \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, & (\lambda\mu).x = \lambda(\mu.x) \\ \beta) \text{ (avec } + \text{ du corps)} : & \delta) \text{ (avec l'unité du corps)} : \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, & (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x & \forall x \in E, & 1.x = x \end{array}$$

On appelle alors **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** ceux de $\mathbb{K}$.

On démontre, à partir des axiomes de définition, les règles de calculs suivantes :

- a) $\boxed{\forall x \in E, \quad 0.x = 0_E}$ b) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_E = 0}$
- c) $\boxed{\forall x \in E, \quad (-1).x = -x}$ opposé de x dans $(E, +)$ d) $\boxed{\text{Pour } (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, \quad \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E}$

Démonstration :

- Pour a), on a, d'une part : $0.x = \underbrace{(0 + 0).x}_{0 \text{ élément neutre de } (K, +, \times)} = \underbrace{0.x + 0.x}_{\text{par } \beta)}$

Mais alors, en ajoutant l'opposé de $0.x$ qui existe dans $(E, +)$, on a : $-0.x + 0.x = -0.x + (0.x + 0.x)$

soit, par associativité de $+$ dans $(E, +)$: $-0.x + 0.x = (-0.x + 0.x) + 0.x$

or, par définition de l'opposé dans le groupe $(E, +)$: $-0.x + 0.x = 0_E$ donc on obtient : $0_E = 0_E + 0.x$

mais 0_E étant élément neutre pour la loi $+$, on a bien prouvé : $0_E = 0.x$

- Pour b), preuve analogue : $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ donc en ajoutant l'opposé de $\lambda.0_E$ qui existe dans $(E, +)$

$$\underbrace{-\lambda.0_E + \lambda.0_E}_{=0_E} = \underbrace{-\lambda.0_E + (\lambda.0_E + \lambda.0_E)}_{\text{par associativité}} = \underbrace{(-\lambda.0_E + \lambda.0_E) + \lambda.0_E}_{=0_E} \text{ soit finalement : } 0_E = 0_E + \lambda.0_E = \lambda.0_E$$

- Pour c), on a, par β) : $x + (-1).x = (1 - 1).x = 0.x$ puisque -1 est l'opposé de 1 dans le groupe $(\mathbb{K}, +)$

donc $x + (-1).x = 0.x = 0_E$ par a).

Or, l'unique élément du groupe $(E, +)$ qui vérifie $x + x' = 0_E$ est le symétrique $-x$ de x pour $+$ soit $(-1).x = -x$

- Pour d) : a) et b) prouvent $\Leftarrow$ donc il reste à établir l'implication directe $\Rightarrow$. Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ avec $\lambda.x = 0_E$

soit $\lambda = 0$ soit $\lambda \neq 0$ et alors $\frac{1}{\lambda}$ existe (inverse c-à-d symétrique de λ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$) et :

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = \frac{1}{\lambda}.0_E \text{ mais } \frac{1}{\lambda}.0_E = 0_E \text{ par b) et par } \gamma) \text{ et } \delta) : \frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = \left(\frac{1}{\lambda}.\lambda\right).x = 1.x = x$$

d'où finalement : $x = 0_E$ ■

PROPOSITION

Produit cartésien d'espaces vectoriels

Si E et F sont des $\mathbb{K}ev$, alors $E \times F$ est aussi un $\mathbb{K}ev$ pour les lois

$$\begin{array}{llll} + : & (E \times F)^2 & \rightarrow & E \times F & \text{et } \mathbb{K} : \mathbb{K} \times (E \times F) & \rightarrow & E \times F \\ & \left((x, y), (x', y') \right) & \mapsto & (x + x', y + y') & & \left(\alpha, (x, y) \right) & \mapsto & (\alpha x, \alpha y) \end{array}$$

Remarque : Le vecteur nul de E est $(0_E, 0_F)$.

Démonstration : Il s'agit de vérifier l'axiomatique de la définition d'un espace vectoriel.

1) Montrons que $(E \times F, +)$ est un groupe commutatif :

* $+$ ainsi définie est bien une loi de composition interne sur $E \times F$

* $+$ définie sur $E \times F$ est commutative en effet : $\forall (x, y) \in E \times F, \forall (x', y') \in E \times F,$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \underbrace{=} \quad (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x, y)$$

$+$ est commutative dans E et F

* $+$ définie sur $E \times F$ est associative : il s'agit de justifier que

$$\forall [(x, y), (x', y'), (x'', y'')] \in (E \times F)^3, \quad ((x, y) + (x', y')) + (x'', y'') = (x, y) + ((x', y') + (x'', y''))$$

or : $((x, y) + (x', y')) + (x'', y'') = (x + x', y + y') + (x'', y'') = ((x + x') + x'', (y + y') + y'')$

et : $(x, y) + ((x', y') + (x'', y'')) = (x, y) + (x' + x'', y' + y'') = (x + (x' + x''), y + (y' + y''))$

mais $(E, +)$ est un groupe donc : $(x + x') + x'' = x + (x' + x'')$ et de même, $(F, +)$ est un groupe : $(y + y') + y'' = y + (y' + y'')$
L'égalité est donc établie.

* $(0_E, 0_F)$ est un élément neutre pour $+$ sur $E \times F$:

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad (x, y) + (0_E, 0_F) = (\underbrace{x + 0_E}_{=x \text{ dans } (E, +)}, \underbrace{y + 0_F}_{=y \text{ dans } (F, +)}) = (x, y)$$

d'où, par commutativité : $(0_E, 0_F) + (x, y) = (x, y) + (0_E, 0_F) = (x, y)$

* Tout élément de $(E \times F)$ possède un opposé pour la loi $+$ de $E \times F$

En effet, pour $(x, y) \in E \times F$, on peut définir $(-x, -y)$ où $-x$ est l'opposé de x dans $(E, +)$ et $-y$ celui de y dans $(F, +)$

Par commutativité : $(-x, -y) + (x, y) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0_E, 0_F)$

donc $(-x, -y)$ est l'opposé de (x, y) .

2) La loi $\mathbb{K}$. correspond bien à une loi externe sur $E \times F$ à opérateurs dans le corps $\mathbb{K}$

3) On vérifie le lien entre les lois :

$$- \underline{\alpha} : \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall [(x, y), (x', y')] \in (E \times F)^2, \quad \lambda \cdot ((x, y) + (x', y')) \underset{?}{=} \lambda \cdot (x, y) + \lambda \cdot (x', y')$$

$$\text{Or : } \lambda \cdot ((x, y) + (x', y')) = \lambda \cdot (x + x', y + y') = (\lambda \cdot (x + x'), \lambda \cdot (y + y'))$$

mais dans $(E, +, \mathbb{K}.)$: $\lambda \cdot (x + x') = \lambda \cdot x + \lambda \cdot x'$ et dans $(F, +, \mathbb{K}.)$: $\lambda \cdot (y + y') = \lambda \cdot y + \lambda \cdot y'$ donc

$$\lambda \cdot ((x, y) + (x', y')) = (\lambda \cdot x + \lambda \cdot x', \lambda \cdot y + \lambda \cdot y') = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) + (\lambda \cdot x', \lambda \cdot y') = \lambda \cdot (x, y) + \lambda \cdot (x', y')$$

$$- \underline{\beta} : \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E \times F, \quad (\lambda + \mu) \cdot (x, y) \underset{?}{=} \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y) \quad \text{Or : } (\lambda + \mu) \cdot (x, y) = ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y)$$

et en utilisant l'axiome β) dans chacune des composantes où on travaille dans les espaces $(E, +, \mathbb{K}.)$ et $(F, +, \mathbb{K}.)$

on a : $(\lambda + \mu) \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x + \mu \cdot x, \lambda \cdot y + \mu \cdot y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) + (\mu \cdot x, \mu \cdot y) = \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y)$ d'où β

$$- \underline{\gamma} : \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E \times F, \quad (\lambda \mu) \cdot (x, y) \underset{?}{=} \lambda \cdot (\mu \cdot (x, y)) \quad \text{Or : } (\lambda \mu) \cdot (x, y) = ((\lambda \mu)x, (\lambda \mu)y)$$

et en utilisant l'axiome γ) dans chacune des composantes où on travaille dans les espaces $(E, +, \mathbb{K}.)$ et $(F, +, \mathbb{K}.)$

on a : $(\lambda \mu) \cdot (x, y) = (\lambda \cdot (\mu \cdot x), \lambda \cdot (\mu \cdot y)) = \lambda \cdot (\mu x, \mu y) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x, y))$

$$- \underline{\delta} : \forall (x, y) \in E \times F, \quad 1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$$

puisque δ est vérifiée sur chacune des composantes étant donnée que $(E, +, \mathbb{K}.)$ et $(F, +, \mathbb{K}.)$ sont des $\mathbb{K}ev$. ■

PROPOSITION

Espace vectoriel E^X pour $E \mathbb{K}ev$

Si E est un $\mathbb{K}ev$ et si X est un ensemble quelconque,

alors $E^X = \mathcal{F}(X, E) = \{f : X \rightarrow E\}$ est un $\mathbb{K}ev$ pour les lois :

$$\forall (f, g) \in E^X, \quad f + g = \left[\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & f(t) + g(t) \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in E^X, \quad \lambda \cdot f = \left[\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & \lambda \cdot f(t) \end{array} \right]$$

$$\text{Remarque : le vecteur nul est ici } 0_{E^X} = \left[\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & 0_E \end{array} \right]$$

Éléments de démonstration :

On rappelle que dans $E^X : f = g \Leftrightarrow \forall t \in X, f(t) = g(t)$ Le lecteur établira alors aisément que

1) $(E^X, +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est 0_{E^X} et où l'opposé de f est $-f = \left[\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & -f(t) \end{array} \right]$

Par exemple : pour la commutativité, pour prouver que $f + g = g + f$, il suffit de justifier que :

$$\forall t \in X, \quad (f + g)(t) = \underbrace{f(t)}_{\in E} + \underbrace{g(t)}_{\in E} \underset{+ \text{ est commutative dans } E}{=} g(t) + f(t) = (g + f)(t)$$

2) les axiomes α), β), γ) et δ) sont vérifiés.

Par exemple : pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(f, g) \in (E^X)^2$, montrons $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$ en prouvant l'égalité des expressions.

Pour tout t dans X :

$$(\lambda \cdot (f + g))(t) \underset{\text{déf de } \mathbb{K}.}{=} \lambda \cdot (f + g)(t) \underset{\text{déf de } +}{=} \lambda \cdot (f(t) + g(t)) \underset{\text{par } \alpha \text{ dans } E}{=} \lambda \cdot f(t) + \lambda \cdot g(t) \underset{\text{déf de } \mathbb{K}.}{=} (\lambda \cdot f)(t) + (\lambda \cdot g)(t) \underset{\text{déf de } +}{=} (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(t) \quad \blacksquare$$