Démonstrations exigibles sur le chapitre III

Proposition ***Formule de Moivre***

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \text{ou encore} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

On pourra utiliser les relations : $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \quad (1)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad (2)$

Donnons nous un réel θ fixé, on démontre d'abord la relation pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence simple sur n.
Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n notée HR_n : "$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$"
<u>Initialisation</u> :
HR_0 est vraie car $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1 = \cos(0) + i\sin(0) = \cos(0\times\theta) + i\sin(0\times\theta)$
HR_1 est vraie car $(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos(1\times\theta) + i\sin(1\times\theta)$
HR_2 est vraie car $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{i\theta}\times e^{i\theta} = e^{i\,(\theta+\theta)} = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ en utilisant (1)
Seule la vérification de HR_0 est réellement indispensable...Celles de HR_1 et HR_2 sont facultatives mais rassurantes...
<u>Hérédité</u> : Il s'agit de démontrer l'implication : $HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$
On suppose ainsi que, pour un $n \in \mathbb{N}$, HR_n est vérifiée autrement dit : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ soit $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
et on démontre que HR_{n+1} est alors aussi vérifiée.

On a :
$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \times (\cos\theta + i\sin\theta) &= \left(e^{i\theta}\right)^n \times e^{i\theta} \\ &= e^{in\theta}\times e^{i\theta} && \text{par } HR_n \\ &= e^{i(n\theta+\theta)} && \text{par (1)} \\ &= e^{i(n+1)\theta} \\ &= \cos\big((n+1)\theta\big) + i\sin\big((n+1)\theta\big)\end{aligned}$$

La relation HR_{n+1} est bien vraie si HR_n est vraie aussi l'implication $HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$ a été démontrée.
<u>Conclusion</u> : En utilisant le principe de récurrence simple, on peut conclure que, pour tout entier naturel n, HR_n est vraie. La récurrence ayant été menée avec θ un réel quelconque, on a bien : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
Il reste à établir la relation pour les entiers négatifs.
Si $k \in \mathbb{Z}_-$ alors $n = -k \in \mathbb{N}$ et, en utilisant le résultat sur l'entier naturel n via :

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^k = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n} = \frac{1}{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)} = \frac{1}{e^{in\theta}} &= e^{-in\theta} && \text{par (2)} \\ &= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) \\ &= \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\end{aligned}$$

on montre que la relation est donc encore vraie pour k entier relatif négatif d'où finalement :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Proposition ***Exercice A-4***

Pour x réel quelconque, déterminer les réels $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

Si $Z = C + iS$ alors $C = \Re e(Z)$ et $S = \Im m(Z)$. *Si on ne demande qu'une des sommes, pensez à introduire le nombre complexe* $Z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ *!*

Simplifions Z : $Z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k$ On reconnaît la somme d'une progression géométrique de raison $z = e^{ix}$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad (1-z)\big(1 + z + z^2 + \cdots + z^n\big) = 1 - z^{n+1}$ aussi on distingue deux cas selon que $z = 1$ ou pas.
<u>1er cas</u> : $e^{ix} = 1$ c'est à dire que $x \equiv 0\ [2\pi]$
Alors, pour tout entier naturel k, $\cos(kx) = 1$ et $\sin(kx) = 0$ donc $C = n+1$ ($n+1$ termes dans la sommes) et $S = 0$
<u>2eme cas</u> : $e^{ix} \neq 1$ c'est à dire que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$

$$\begin{aligned}\text{Alors : } Z = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^{ix}} &= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} && \text{en factorisant par l'angle moitié} \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{-2i\times\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\times\sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \times \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}}_{\in\mathbb{R}} && \text{par les formules d'Euler}\end{aligned}$$

De sorte que, finalement : $C = \Re e(Z) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$ et $S = \Im m(Z) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$ En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [2\pi] \\ \cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} & \text{si } x \not\equiv 0\ [2\pi]\end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0\ [2\pi] \\ \sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} & \text{si } x \not\equiv 0\ [2\pi]\end{cases}$$

Proposition **Somme et produit des racines de l'unité**

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^{ieme} de l'unité pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ c'est à dire l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$: $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ \omega^k \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

$$\text{On a alors} \quad \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$$

Une première preuve : On utilise : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad (1-z)\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right) = 1 - z^n$

Si $z \in \mathbb{U}_n$ et si $z \neq 1$, on a : $\quad z^n = 1$ et $1 - z \neq 0$

donc : $\quad \underbrace{(1-z)}_{\neq 0}\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right) = 1 - z^n = 0$ soit encore $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$

Remarquons qu'on a obtenu ce résultat toute racine n^{ieme} différente de 1 : $\forall z \in \mathbb{U}_n - \{1\}, \quad 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$

En particulier, pour $z = \omega$, on obtient : $\displaystyle \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$

Pour le produit : $\displaystyle \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{\frac{(n-1)n}{2}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}} = e^{\frac{\cancel{2}i\pi}{\cancel{n}} \times \frac{(n-1)\cancel{n}}{\cancel{2}}} = e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1}$ car $e^{i\pi} = -1$

Une deuxième preuve : On utilise directement l'écriture exponentielle.

$$\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(\frac{\cancel{2}i\pi}{\cancel{n}} \times \frac{(n-1)\ \cancel{n}}{\cancel{2}}\right) = e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1}$$

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k \underset{\text{car } e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1 \text{ si } n \geq 2}{=} \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{\overbrace{1 - e^{2i\pi}}^{=0}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

En fait, cette méthode est peu différente de la première preuve... d'où le "deux preuves et demi" de l'exercice A10

Une troisième preuve : Numérotons $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les n racines n^{ieme} de l'unité.

On recherche donc : $\displaystyle \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} z_k$ et $\displaystyle \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} z_k$ Pour cela, on factorise le polynôme $P(z) = z^n - 1$:

$$P(z) = z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_n)$$

Pour le produit des racines, on examine les termes constants : *On l'obtient par l'évaluation $P(0)$*

$$-1 = (-z_0) \times (-z_1) \times \cdots \times (-z_n) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k \qquad \text{soit} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} z_k = \frac{-1}{(-1)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{2n}} = (-1)^{n+1}$$

Pour le produit des racines, on examine les termes de degré $n-1$:

Dans le développement de $(z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_n)$, pour obtenir un terme de degré $n-1$, on choisit z dans tous les termes sauf un qui vaut $-z_i$

$$0 = (-z_0) + (-z_1) + \cdots + (-z_n) = -\sum_{k=0}^{n-1} z_k \qquad \text{soit} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$