

Démonstrations exigibles sur le chapitre V

DÉFINITION ET PROPOSITIONS

Fonction Arcsin

La fonction arcsin est la bijection réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle est définie, continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad y = \arcsin(x) \Leftrightarrow \sin(y) = x \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et : $\forall x \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Elle n'est pas dérivable en -1 et 1 mais sa courbe représentative dans un repère orthonormal présentera aux points d'abscisses 1 et -1 des tangentes verticales. Enfin, la fonction arcsin est une fonction impaire.

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$:

elle est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

En appliquant le théorème des bijections réciproque, on peut définir sa bijection réciproque, qu'on appelle arcsin.

C'est une application continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Pour x dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on sait que $\arcsin$ est dérivable en $y = \sin(x)$ si et seulement si $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$

Aussi, la fonction arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ puisque $\cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et elle n'est pas dérivable en $1 = \sin(\frac{\pi}{2})$ et en $-1 = \sin(-\frac{\pi}{2})$. Néanmoins, sa courbe représentative dans un repère orthonormal présentera aux points d'abscisses 1 et -1 des tangentes verticales.

De plus, appliquant la formule $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$ avec $f = \sin|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$: $\forall y \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$

Simplifions cette expression. On sait que $\arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\arcsin(y)) \geq 0$ et, par suite :

$$\cos(\arcsin(y)) = |\cos(\arcsin(y))| = \sqrt{\cos^2(\arcsin(y))} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))} = \sqrt{1 - y^2}$$

On a donc justifié que : $\forall y \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Remarque : Mais alors $\arcsin'(y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm 1} +\infty$ aussi, en appliquant le théorème de prolongement d'une dérivée,

on retrouve que la fonction arcsin n'est pas dérivable en -1 et 1 .

Enfin, pour $x \in [-1, 1]$: $\sin(\arcsin(-x)) = -x = -\sin(\arcsin(x)) = \sin(-\arcsin(x))$ par définition de arcsin et par imparité de sin

Aussi $a = \arcsin(-x)$ et $b = -\arcsin(x)$ sont deux réels de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $\sin(a) = \sin(b)$.

Or, la fonction sinus, restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective, donc, en particulier, injective et on a donc $a = b$.

On a donc justifié que : $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ autrement dit que arcsin est impaire

DÉFINITION ET PROPOSITIONS

Fonction Arccos

La fonction arccos est la bijection réciproque de la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$.

Elle est définie, continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$ et :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad y = \arccos(x) \Leftrightarrow \cos(y) = x \text{ et } y \in [0, \pi]$$

Elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et : $\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Elle n'est pas dérivable en -1 et 1 mais sa courbe représentative dans un repère orthonormal présentera aux points d'abscisses 1 et -1 des tangentes verticales.

La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$:

elle est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

En appliquant le théorème des bijections réciproque, on peut définir sa bijection réciproque, qu'on appelle arccos.

C'est une application continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$

Pour x dans $[0, \pi]$, on sait que $\arccos$ est dérivable en $y = \cos(x)$ si et seulement si $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$

Aussi, la fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ puisque $\sin(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in]0, \pi[$ et elle n'est pas dérivable en -1 et 1 mais sa courbe représentative dans un repère orthonormal présentera aux points d'abscisses 1 et -1 des tangentes verticales.

De plus, appliquant la formule $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$ avec $f = \cos|_{[0, \pi]}$: $\forall y \in] -1, 1[, \quad \arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))}$

Simplifions cette expression. On sait que $\arccos(y) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos(y)) \geq 0$ et, par suite :

$$\sin(\arccos(y)) = |\sin(\arccos(y))| = \sqrt{\sin^2(\arccos(y))} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(y))} = \sqrt{1 - y^2}$$

On a donc justifié que : $\forall y \in] -1, 1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

Remarque : $\arccos'(y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm 1} +\infty$ aussi, en appliquant le théorème de prolongement d'une dérivée,

on retrouve que la fonction arccos n'est pas dérivable en -1 et 1

La fonction arctan est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Elle est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \arctan(x) \Leftrightarrow \tan(y) = x \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Enfin, la fonction arctan est une fonction impaire.

La restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$:

elle est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

En appliquant le théorème des bijections réciproque, on peut définir sa bijection réciproque, qu'on appelle arctan.

C'est une application continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Pour x dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on sait que $\arctan$ est dérivable en $y = \tan(x)$ si et seulement si $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$

Aussi, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $1 + \tan^2(x) \neq 0$

De plus, appliquant la formule $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$ avec $f = \tan$ $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\arctan(-x)) = -x = -\tan(\arctan(x)) = \tan(-\arctan(x))$ par définition de arctan et par imparité de tan

Aussi $a = \arctan(-x)$ et $b = -\arctan(x)$ sont deux réels de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\tan(a) = \tan(b)$.

Or, la fonction tangente, restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est bijective, donc, en particulier, injective et on a donc $a = b$.

On a donc justifié que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$ autrement dit que arctan est impaire

PROPOSITIONS

Des relations utiles

$$1) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \qquad 2) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$$

$$3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{sg}(x) \frac{\pi}{2}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \qquad 5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad 6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$$

1) Preuve analytique On introduit la fonction $[f : x \mapsto \arccos x + \arcsin x]$

Cette application est définie et continue sur $[-1, 1]$ comme somme de fonctions usuelles .

Elle est aussi dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et : $\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

La fonction f est donc constante sur $] -1, 1[$: $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = k$ et, par continuité, on a : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = k$

Pour déterminer la constante k , on évalue en 0 : $f(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

Preuve algébrique : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x = \sin(\arcsin x)$

Aussi $a = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ et $b = \arcsin x$ sont deux réels de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (en effet $\arccos x \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

Et, on a $\sin(a) = \sin(b)$. Or, la fonction sinus, restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective, donc, en particulier, injective et donc $a = b$.

On a donc justifié que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin(x)$

2) Preuve analytique On introduit la fonction $[f : x \mapsto \arccos x + \arccos(-x)]$

Cette application est définie et continue sur $[-1, 1]$ (somme et composée de fonctions usuelles) .

Elle est aussi dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et : $\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + (-1) \times \frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0$.

La fonction f est donc constante sur $] -1, 1[$: $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = k$ et, par continuité, on a : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = k$

Pour déterminer la constante k , on évalue en 0 : $f(0) = \arccos 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ Là aussi, une preuve algébrique est possible.

Preuve algébrique : $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(-x)) = -x$ et $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$

Aussi $a = \arccos(-x)$ et $b = \pi - \arccos x$ sont deux réels de $[0, \pi]$ (en effet $\arccos x \in [0, \pi] \Rightarrow \pi - \arccos x \in [0, \pi]$)

Et, on a $\cos(a) = \cos(b)$. Or, la fonction cosinus, restreinte à $[0, \pi]$ est bijective, donc, en particulier, injective et donc $a = b$.

On a donc justifié que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\pi - \arccos x = \arccos(-x)$

3) Preuve analytique On introduit la fonction $[f : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}]$

Cette application est définie et continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Elle est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = \arctan(-x) + \arctan \frac{1}{-x} = -\arctan x - \arctan \frac{1}{x} = -f(x)$ par imparité de $\arctan$

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par composition : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

La fonction f est donc constante sur $]0, +\infty[: \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = k$

Pour déterminer la constante k , on évalue en 1 : $f(0) = \arctan 1 + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

On a donc : $\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2}$ et, par imparité, $\forall x < 0, f(x) = -\underbrace{f(-x)}_{=\frac{\pi}{2} \text{ car } -x > 0} = -\frac{\pi}{2}$

Preuve algébrique : $\forall x \in \mathbb{R}^*, a = \arctan \frac{1}{x}$ alors $a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan a = \tan(\arctan \frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$

- si $x > 0$ alors : $b = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\arctan x}_{\in]0, \frac{\pi}{2}[}$ et $\tan b = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \arctan x)} = \frac{\cos(\arctan x)}{\sin(\arctan x)} = \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x}$

aussi $\tan a = \tan b$ avec $(a, b) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$ or $\tan$ est bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $a = b$.

- si $x < 0$ alors : $b = -\frac{\pi}{2} - \underbrace{\arctan x}_{\in]-\frac{\pi}{2}, 0[}$ et $\tan b = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\cos(-\frac{\pi}{2} - \arctan x)} = \frac{-\cos(\arctan x)}{-\sin(\arctan x)} = \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x}$

aussi $\tan a = \tan b$ avec $(a, b) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$ or $\tan$ est bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $a = b$.

Pour 4), 5), 6) Il suffit de considérer des taux d'accroissement en 0 :

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arcsin 0}{x - 0} = \arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \arccos 0}{x - 0} = \arccos'(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = -1$$