

Démonstrations exigibles sur le chapitre VII

PROPOSITION

Distance d'un point à une droite

Si $\mathcal{D}$ est une droite du plan issue de A normal à $\vec{n}$ alors

la distance d'un point M à la droite $\mathcal{D}$ est $d(A, \mathcal{D}) = AH = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}$ où H est le projeté de M sur $\mathcal{D}$

Lorsque $M(x_M; y_M)$ et lorsque $\mathcal{D}$ est donnée par une équation $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sont fixés alors

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Par définition : $d(M, \mathcal{D}) = \min \{MP \mid P \in \mathcal{D}\}$ Montrons que : $d(M, \mathcal{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. On a : $\forall P \in \mathcal{D}, \quad MP^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}) \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}) = MH^2 + HP^2 + 2 \underbrace{\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HP}}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{HP}}$

Ainsi : $\forall P \in \mathcal{D}, \quad MP^2 = MH^2 + HP^2 \geq MH^2$ avec égalité si $P = H$ donc on a bien $d(M, \mathcal{D}) = MH$

• Or, si $A \in \mathcal{D}$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{AH} \perp \vec{n}} + \overbrace{\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}}^{\text{vecteurs colinéaires}} = \pm HM \times \|\vec{n}\| \text{ d'où } d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

• Si $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$ et donc, si $A(x_A, y_A)$, on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A) = ax_M + by_M - (ax_A + by_A) = ax_M + by_M + c \quad \text{car } A \in \mathcal{D} \Rightarrow ax_A + by_A + c = 0$$

Conclusion :
$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$