

Démonstrations exigibles sur les compléments du chapitre V

PROPOSITIONS

Injectivité, surjectivité et composition

Soient E, F et G des ensembles quelconques et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications.

1) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

La réciproque est fausse mais on a : 1') $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective et 1'') $\begin{cases} g \circ f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases} \Rightarrow g \text{ injective.}$

Pour construire un contre-exemple, on doit choisir : f injective et non surjective, g non injective et $g \circ f$ injective.

2) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

La réciproque est fausse mais on a : 2') $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective et 2'') $\begin{cases} g \circ f \text{ surjective} \\ g \text{ injective} \end{cases} \Rightarrow f \text{ surjective.}$

Pour construire un contre-exemple, on doit choisir : f non surjective, g non injective et surjective et $g \circ f$ surjective.

Preuve de 1) :

- On suppose que : f est injective c'est à dire que : $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (i).
 g est injective c'est à dire que : $\forall (y, y') \in F^2, g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ (ii).

- On veut prouver que : $g \circ f$ est injective soit : $\forall (x, x') \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ (*).

- Aussi, on se donne $(x, x') \in E^2$ quelconque avec $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Il s'agit de montrer que : $x = x'$.

Mais : $g \circ f(x) = g \circ f(x') \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow f(x) = f(x')$ en utilisant (ii) avec $\begin{cases} y = f(x) \in F \\ y' = f(x') \in F \end{cases}$.

Puis : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ en utilisant (i).

Pour $(x, x') \in E^2$ quelconque, $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ entraîne bien que $x = x'$ L'implication (*) est donc démontrée.

Preuve de 1') :

- On suppose que : $g \circ f$ est injective c'est à dire que : $\forall (x, x') \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ (*).

- On veut prouver que : f est injective soit : $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (i).

- Aussi, on se donne $(x, x') \in E^2$ quelconque avec $f(x) = f(x')$. Il s'agit de montrer que : $x = x'$.

Mais, en composant par g , on a : $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Leftrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ par (*).

Pour $(x, x') \in E^2$ quelconque, $f(x) = f(x')$ entraîne bien que $x = x'$ L'implication (i) est donc démontrée.

Preuve de 1'') :

- On suppose que : $g \circ f$ est injective soit : $\forall (x, x') \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ (*).
 f est surjective c'est à dire que : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$ (**).

- On veut prouver que : g est injective soit : $\forall (y, y') \in F^2, g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ (ii).

- Aussi, on se donne $(y, y') \in F^2$ quelconque avec $g(y) = g(y')$. Il s'agit de montrer que : $y = y'$.

En utilisant (**), on sait qu'il existe x et x' dans E avec $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

Aussi : $g(y) = g(y') \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Leftrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ par (*).

Puis, en composant par f , on a : $x = x' \Rightarrow y = f(x) = f(x') = y'$.

Pour $(y, y') \in F^2$ quelconque, $g(y) = g(y')$ entraîne bien que $y = y'$. L'implication (ii) est donc démontrée.

Pour $(x, x') \in E^2$ quelconque, $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ entraîne bien que $x = x'$ L'implication (*) est donc démontrée.

Contre-exemple On prend $E = \{a, b, c\}$, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $G = \{1, 2, 3\}$.

f est définie par : $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, $f(c) = \gamma$ (elle est injective mais pas surjective (δ n'a pas d'antécédent))

g est définie par : $g(\alpha) = 1$, $g(\beta) = 2$, $g(\gamma) = 3$ et $g(\delta) = 3$ (elle n'est pas injective car 3 a deux antécédents distincts)

$g \circ f$ vérifie $g \circ f(a) = 1$, $g \circ f(b) = 2$ et $g \circ f(c) = 3$ (qui est bien injective même bijective)

Preuve de 2) :

- On suppose que : f est surjective c'est à dire que : $\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x)$ (i).
 g est surjective c'est à dire que : $\forall z \in G, \exists y \in F, \quad z = g(y)$ (ii).

- On veut prouver que : $g \circ f$ est surjective soit : $\forall z \in G, \exists x \in E, \quad z = g \circ f(x)$ (*).

- Aussi, on se donne $z \in G$ quelconque. Il s'agit de construire $x \in E$ avec $g \circ f(x) = z$.

Mais en utilisant (ii), on sait qu'il existe y dans F avec $z = g(y)$

Puis, en utilisant (i), on sait qu'il existe x dans E avec $y = f(x)$ de sorte que $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$

Pour $z \in G$ quelconque, on a trouvé $x \in E$ avec $z = g \circ f(x)$ aussi (*) est démontrée.

Preuve de 2') :

- On suppose que : $g \circ f$ est surjective c'est à dire que : $\forall z \in G, \exists x \in E, \quad z = g \circ f(x)$ (*)

- On veut prouver que : g est surjective soit : $\forall z \in G, \exists y \in F, \quad z = g(y)$ (ii)

- Aussi, on se donne $z \in G$ quelconque. Il s'agit de construire $y \in F$ avec $g(y) = z$.

En utilisant (*), on sait qu'il existe x dans E avec $z = g \circ f(x) = g(f(x))$

En notant $y = f(x) \in F$, on a bien : $z = g(y)$

Pour $z \in G$ quelconque, on a trouvé $y \in F$ avec $z = g(y)$ aussi (ii) est démontrée.

Preuve de 2'') :

- On suppose que : $g \circ f$ est surjective c'est à dire que : $\forall z \in G, \exists x \in E, \quad z = g \circ f(x)$ (*)
 g est injective c'est à dire que : $\forall (y, y') \in F^2, \quad g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ (**)

- On veut prouver que : f est surjective soit : $\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x)$ (i)

- Aussi, on se donne $y \in F$ quelconque. Il s'agit de construire $x \in E$ avec $f(x) = y$.

On remarque que : $z = g(y) \in G$ donc par (*), on sait qu'il existe $x \in E$ avec $z = g \circ f(x)$

Alors : $z = g(y) = g \circ f(x) \Rightarrow g(y) = g(f(x)) \Rightarrow y = f(x)$ en utilisant (**) avec y et $y' = f(x)$

Pour $y \in F$ quelconque, on a trouvé $x \in E$ avec $y = f(x)$ aussi (i) est démontrée.

Contre-exemple On prend $E = \{a, b, c\}$, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et $G = \{1, 2, 3\}$.

f est définie par : $f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta \quad f(c) = \gamma$ (elle est injective mais pas surjective (δ n'a pas d'antécédent))

g est définie par : $g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = 2, \quad g(\gamma) = 3 \quad \text{et} \quad g(\delta) = 3$ (elle n'est pas injective car 3 a deux antécédents distincts)

$g \circ f$ vérifie $g \circ f(a) = 1, \quad g \circ f(b) = 2 \quad \text{et} \quad g \circ f(c) = 3$ (qui est bien surjective même bijective)