Démonstration exigible sur le chapitre II

Proposition — ***Équation $y' + a(t)y = 0$ où a est une fonction continue sur I***

Les solutions sur I de l'équation $\quad y' + a(t)y = 0 \quad$ lorsque a est une fonction continue sur I sont les fonctions $[x \mapsto Ce^{-A(t)}]$ où A est une primitive de a sur I et où C est une constante arbitraire dans $\mathbb{R}$.

On admet, pour l'instant, que toute fonction continue sur I possède des primitives sur I

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de $\quad (E) : \quad y' + a(t)y = 0 \quad$ et on choisit A une primitive de a sur I.
Il s'agit de démontrer l'égalité $\quad \mathcal{S} = \left\{[x \mapsto Ce^{-A(x)}] \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\} \quad$ entre deux ensembles : on procède par double inclusion.

• Montrons d'abord que : $\quad \left\{[x \mapsto Ce^{-A(x)}] \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{S}$

Soit C une constante réelle, justifions que l'application $[f : x \mapsto Ce^{-A(x)}]$ est une solution de (E) sur I.
Tout d'abord, A est une application dérivable sur I puisque c'est une primitive de a et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ où la fonction exponentielle est dérivable donc, par composition, l'application f est bien dérivable sur I.
De plus : $\quad \forall x \in I, \quad f'(x) = C \times -\underbrace{A'(x)}_{=a(x)} \times e^{-A(x)} = -a(x) \times Ce^{-A(x)} = -a(x)f(x)$

on a donc $\quad \forall x \in I, \quad f'(x) + a(x)f(x) = 0 \quad$ aussi f est bien une solution de (E) sur I

• Montrons maintenant que : $\quad \mathcal{S} \subset \left\{[x \mapsto Ce^{-A(x)}] \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}$

On se donne une solution y de (E) quelconque. Il s'agit de montrer que : $\quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = Ce^{-A(x)}$
Pour cela, on introduit la fonction $\quad \left[g : x \mapsto e^{A(x)}y(x)\right] \quad$ et on prouve que cette application est constante sur I en montrant que sa dérivée est nulle. On peut calculer la dérivée de g sur I car g est un produit de deux fonctions dérivables sur I : y est dérivable sur I car c'est une solution de (E) et $[x \mapsto e^{A(x)}]$ est dérivable sur I par le théorème de composition.

$\forall x \in I, \quad g'(x) = \underbrace{A'(x)}_{=a(x)} e^{A(x)}y(x) + e^{A(x)}y'(x) = a(x)e^{A(x)}y(x) + e^{A(x)}y'(x) = e^{A(x)} \underbrace{(a(x)y(x) + y'(x))}_{=0} = 0$

en utilisant que A est une primitive de a et que y est une solution de (E).
Ainsi, g est une fonction constante donc : $\quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad g(x) = e^{A(x)}y(x) = C$
soit finalement $\quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = Ce^{-A(x)}$