Devoir maison n° 1

" *L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence* "

Charles Caleb Colton (1780-1832), auteur anglais.

Exercice n°1 *Calculs de lignes trigonométriques*

Les valeurs exactes des sinus et cosinus (lignes trigonométriques)des angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont des résultats de cours à connaître. En utilisant des relations classiques, établir la valeur exacte de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ pour $\theta = \frac{\pi}{12}$ puis $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice n°2 *Équations trigonométriques*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1)\quad \sqrt{6}\sin(2x) + \sqrt{2}\cos(2x) = -2 \qquad (E_2)\quad \sin x \tan x + 2\cos x = 2$

Exercice n°3 *Inéquations trigonométriques*

Résoudre sur $[0, 2\pi[$ puis sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1)\quad 3 - 4\sin^2 x \leqslant 0 \qquad (I_2)\quad \cos x \sin^2 x > \sin x \cos^2 x$

Exercice n°4 *Continuité et dérivabilité*

On considère l'application f de la variable réelle x donnée par l'expression $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+|x|}$.

1) Justifier soigneusement que f est continue sur son domaine de définition D.
Est-il nécessaire d'étudier f sur la totalité du domaine D ?

2) Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et préciser le nombre dérivé $f'(x)$.
Expliciter les abscisses des points où la courbe représentative de f dans un repère orthogonal possède une tangente parallèle aux axes du repère.

Exercice n°5 *Étude guidée d'une fonction*

0) *Question préliminaire* : Prouver que, pour tout réel x, $e^{2x} - e^x + 1 > 0$.

I) *Une première application...* On définit la fonction f par l'expression : $f(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$

I-1) Justifier soigneusement que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

I-2) Établir que $f(x)$ a le signe de $2e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

II) On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$
et on note Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

II-1) Démontrer que F est une primitive de f.

II-2) Donner le tableau des variations de F.

II-3) Montrer que la courbe Γ possède deux asymptotes dont on précisera des équations.

II-4) Montrer que Γ rencontre ses asymptotes en un unique point dont on donnera les coordonnées.
Préciser une équation de la tangente à Γ en ce point.
Préciser également la position de Γ par rapports aux asymptotes.

II-5) Donner l'allure de la courbe Γ. *Unité graphique : 2 cm* *On donne* $\ln 2 \simeq 0,7$ *et* $\ln 3 \simeq 1,1$