le 21/10/2011 et le 02/11/2011 — Lycée Paul Constans — Classe *PTSI*

DEVOIR MAISON n° 2

≪ *Le livre de la nature est écrit en langage mathématique et quiconque prétend le lire doit d'abord apprendre ce langage. Nos équations reflètent peut être quelque chose des "grandes structures" du réel.*≫
Galilée (1565-1642), physicien, astronome et mathématicien italien

EXERCICE N°1 *Une équation de Ricatti* **Pour le 21/10/2011**

On se propose de résoudre sur l'intervalle le plus grand possible inclus dans $]0,+\infty[$ l'équation différentielle non linéaire du premier ordre $(E)\quad y' - \dfrac{y}{x} - y^2 = -9x^2$

1) Déterminer une solution particulière y_0 de (E) sur $]0,+\infty[$ qui soit une fonction affine.

On admettra alors (théorème de Cauchy-Lipschitz), que si y est une autre solution de (E) définie sur un intervalle I alors

$$\forall x \in I, \quad y(x) \neq y_0(x)$$

De ce fait, on peut donc associer à toute solution y différente de y_0 la fonction z telle que $y = y_0 - \dfrac{1}{z}$

2) Prouver que z est alors solution sur I de (E_1) : $\quad z' + \left(6x + \dfrac{1}{x}\right) z = 1.$

3) Résoudre (E_1) sur $]0,+\infty[$.

4) On introduit f_C donnée par $\quad f_C(x) = 1 + 6Ce^{-3x^2}$. Démontrer que : f_C ne s'annule pas sur $]0;+\infty[\Leftrightarrow C \geqslant -\dfrac{1}{6}$

On pourra distinguer le cas $C > 0$, $C = 0$ et $C < 0$ et étudier les variations de f_C sur $]0;+\infty[$

5) Donner enfin les solutions de (E) définie sur $]0,+\infty[$. (Il ne sera pas utile de détailler tous les calculs.).

EXERCICE N°2 **Pour le 21/10/2011** *Résolution de l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$ où θ est un paramètre réel*

On considère l'équation complexe (E_θ) : $\quad z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0 \quad$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

On note z_1 et z_2 les deux racines complexes (éventuellement égales) de cette équation.

1)a) Calculer le discriminant de cette équation en fonction de θ.

b) Montrer que si (E_θ) admet une racine réelle alors c'est une racine double. *(On pourra utiliser la somme et le produit des racines)*

c) Montrer que les parties imaginaires de z_1 et z_2 sont sont soit toutes deux nulles soit de signes contraires.

2)a) Démontrer que, pour $\theta \in [0; 2\pi]$, $\quad e^{2i\theta} - 1 = 2\sin(\theta)\left[-\sin\theta + i\cos\theta\right]$

b) Déterminer alors, sous forme exponentielle, les racines carrées de $e^{2i\theta} - 1$

c) En déduire les racines de l'équation (E) dans le cas où $\theta \in [0; 2\pi]$.

EXERCICE N°3 *Calcul de la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$* **Pour le 21/10/2011**

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on définit pour tout nombre complexe z les nombres complexes

$$P(z) = (z+1)^n - 1 \qquad \text{et} \qquad Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} z^k$$

On appelle aussi $\quad z_0,\ z_1, \ldots,\ z_{n-1}\quad$ les n solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ telles que $\quad z_0 = 0 \quad$ et $\quad \arg(z_1) < \arg(z_2) < \cdots < \arg(z_{n-1}) \quad$ où $\arg(z)$ est l'argument principal de z dans $[0, 2\pi[$

1) ***Préliminaire*** : Si $\theta \in [0, 2\pi[$, donner la forme exponentielle de $e^{i\theta} - 1$

2) Résoudre $\quad P(z) = 0 \quad$ et identifier les nombres complexes $z_0,\ z_1, \ldots,\ z_{n-1}$

3) Démontrer que : $\quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = zQ(z)$

Nous verrons dans l'année un résultat (unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne)justifiant que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)$$

4) En utilisant ce résultat qu'on admettra et calculant $Q(0)$ de deux façons, déterminer la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

EXERCICE N°4 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $\quad y'' + 2y' + 2y = \sin(ax)e^{-x}$ (E) en fonction du paramètre réel a. **Pour le 02/11/2011**