le 22/11/2011 et le 02/12/2011 | Lycée Paul Constans | Classe *PTSI*

DEVOIR MAISON n° 3

« *La vie ne vaut d'être vécue que pour deux raisons : faire des mathématiques et enseigner les mathématiques* »

Simon Poisson (1781-1840), phycisien et mathématicien français.

EXERCICE N°1 **(Pour le 22/11)** Étant donné le paramètre réel m, on considère l'équation différentielle

$$(E_m) : \; y'' + m(m-2)y' - 2m^3 y = xe^{mx}$$

Résoudre l'équation (E_m) selon les différentes valeurs du paramètre m.

EXERCICE N°2 **(Pour le 22/11)** Résoudre les systèmes suivant :

1) $(S_1) \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$ 2) $(S_2) \begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2 \times 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$

EXERCICE N°3 **(Pour le 22/11)** Soit les fonction f et g définies par :

$$f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

1) Démontrer que les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f et g à l'aide des théorèmes généraux et, pour les réels x où cela est possible, calculer les nombres $f'(x)$ et $g'(x)$.

3) Que peut-on conclure ?

EXERCICE N°4 **(Pour le 2/12)**

1) Prouver que : $\forall (a,b) \in]-1,1[^2, \quad \arctan(a) + \arctan(b) = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab}$

2) Déterminer alors la valeur de $A = 5\arctan \dfrac{1}{8} + 2\arctan \dfrac{1}{18} + 3\arctan \dfrac{1}{57}$

EXERCICE N°5 **(Pour le 2/12)**

On veut résoudre l'équation différentielle $y'' - \tan(t)y' + 2y = 0 \quad (E)$ sur l'intervalle $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre sur I l'équation différentielle $\sin(t)y' + \left(2\cos(t) - \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\right) y = 0 \quad (E_1)$

2) a) A l'aide d'un changement de variables, démontrer que la primitive F sur I de $\left[f : t \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(t)\cos(t)}\right]$ qui s'annule en $\dfrac{\pi}{6}$ est telle que : $\forall t \in I, \quad F(t) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sin(t)} \frac{du}{u^2(1-u^2)}$

b) En remarquant qu'il existe des réels α, β et γ tels que : $\forall u \in]0,1[, \quad \dfrac{1}{u^2(1-u^2)} = \dfrac{\alpha}{u^2} + \dfrac{\beta}{1-u} + \dfrac{\gamma}{1+u}$
calculer alors le réel $F(t)$ pour tout réel t de I à l'aide des fonctions usuelles.

3) a) Justifier que $[t \mapsto \sin(t)]$ est une solution évidente de (E) sur I

b) Si y est solution de (E) sur I, on définit la fonction z sur I par : $\forall t \in I, \quad y(t) = z(t)\sin(t)$
Justifier que z ainsi définie est deux fois dérivables sur I et démontrer que :
y est solution de (E) sur I si et seulement si z' est solution de (E_1)

4) Déterminer les solutions réelles de l'équation (E) sur I.