PTSI : Correction du DM n°1

Exercice n°1 *Calculs de lignes trigonométriques*

Les valeurs exactes des sinus et cosinus (lignes trigonométriques)des angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont des résultats de cours à connaître.
En utilisant des relations classiques, établir la valeur exacte de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ pour $\theta = \frac{\pi}{12}$ puis $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ de sorte qu'en utilisant les relations donnant $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ à l'aide de $\cos a, \cos b, \sin a$ et $\sin b$, on a :

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$ soit $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{1}2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4}$ soit $\boxed{\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$

en utilisant la quantité conjuguée du dénominateur puis en simplifiant à l'aide d'identités remarquables

Par ailleurs : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ puis $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$ et enfin $\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$ aussi

$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12}$ soit $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ soit $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\frac{5\pi}{12}$ soit $\boxed{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{5\pi}{12}$ soit $\boxed{\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

Enfin : $\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\tan\frac{5\pi}{12}$ par π périodicité et imparité de tan

et $\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3}$ (conjugué) Finalement : $\boxed{\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}}$ et $\boxed{\tan\frac{7\pi}{12} = -2-\sqrt{3}}$

Exercice n°2 *Équations trigonométriques*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (E_1) $\sqrt{6}\sin(2x)+\sqrt{2}\cos(2x) = -2$ (E_2) $\sin x\tan x + 2\cos x = 2$

• En simplifiant chaque membre par $\sqrt{2}$ puis en utilisant la méthode de Fresnel, on a :

$$(E_1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin(2x)+\cos(2x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \underbrace{\sin\frac{\pi}{3}\sin(2x)+\cos\frac{\pi}{3}\cos(2x)}_{=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)} = \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

Finalement : $(E_1) \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $\Leftrightarrow$ $2x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$ ou $2x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_1) est $\Leftrightarrow$ $2x \equiv \frac{9+4}{12}\pi$ $[2\pi]$ ou $2x \equiv \frac{-9+4}{12}\pi$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ $x \equiv \frac{13\pi}{24}$ $[\pi]$ ou $x \equiv -\frac{5\pi}{24}$ $[\pi]$

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{13\pi}{24}+k\pi ; -\frac{5\pi}{24}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

• Tout d'abord, l'ensemble des solutions de (E_2) est inclus dans $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Sur D : $(E_2) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos x} + 2\cos x = 2$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x}$ $+2\cos^2 x = 2\cos x$ La réciproque de cette équivalence n'est vraie que sur le domaine D !

$\Leftrightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$ On reconnaît une identité remarquable X^2-2X+1 où $X = \cos x$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0$ $[2\pi]$

De plus, si $x \equiv 0$ $[2\pi]$ alors : $\exists p\in\mathbb{Z}$, $x = 2p\pi$ aussi $\forall k\in\mathbb{Z}$, $x = 2p\pi = \frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow \underbrace{p-k}_{\in\mathbb{Z}} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\notin\mathbb{Z}}$ absurde !

On en déduit donc que, si $x \equiv 0$ $[2\pi]$ alors $x \in D$. Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}}$$

Exercice n°3 *Inéquations trigonométriques*

Résoudre sur $[0,2\pi[$ puis sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1)\quad 3-4\sin^2 x \leqslant 0 \qquad (I_2)\quad \cos x \sin^2 x > \sin x \cos^2 x$

• En utilisant la croissance de la fonction racine sur $[0,+\infty[$ et le fait que, pour tout réel X, $\sqrt{X^2}=|X|$, on obtient :

$$(I_1) \Leftrightarrow \tfrac{3}{4} \leqslant \sin^2 x \Leftrightarrow \tfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant |\sin x| \Leftrightarrow -1 \leqslant \sin x \leqslant -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \tfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin x \leqslant 1$$

Sur $[0,2\pi[$, on obtient : x solution de (I_1) sur $[0,2\pi[\Leftrightarrow x \in \left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$ ou $x \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ sur } [0,2\pi[\text{ est : } \mathcal{S}_1 = \left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]}$

Par périodicité, on en déduit l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{S}_1^{\mathbb{R}} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right] \right)$

• On a : $(I_2) \Leftrightarrow \cos x \sin x \times \sin x - \cos x \sin x \times \cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x \sin x \times (\sin x - \cos x) > 0$

Par ailleurs, par la méthode de Fresnel, on a : $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ et $x \in [0,2\pi[\Rightarrow x-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$

aussi, sur $[0,2\pi[$: $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \{0,\pi\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\}$ d'où le tableau de signes suivants

et $\sin x - \cos x > 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in]0,\pi[\Leftrightarrow x \in]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}[$ pour l'expression $f(x) = \cos x \sin x \times (\sin x - \cos x)$

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		π		$5\pi/4$		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	+	|	+	|	+	0	−	|	−	|	−	0
$\cos x$	|	+	|	+	0	−	|	−	|	−	0	+	|
$\sin x - \cos x$	|	−	0	+	|	+	|	+	0	−	|	−	
$f(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

En définitive, l'ensemble des solutions de (I_2) sur $[0,2\pi[$ est :
$\mathcal{S}_2 =]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[\cup]\pi,\frac{5\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{2},2\pi[$

Par périodicité, l'ensemble des solutions réelles de (I_2) est :

$$\mathcal{S}_2^{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\cup \left]\pi+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right[$$

Exercice n°4 *Continuité et dérivabilité*

On considère l'application f de la variable réelle x donnée par l'expression $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+|x|}$

1) Justifier soigneusement que f est continue sur son domaine de définition D.
Est-il nécessaire d'étudier f sur la totalité du domaine D ?

• Pour tout x réel, $|x| \geqslant 0$ aussi $1+|x|>0$ et ne s'annule donc pas. Par ailleurs, la fonction racine est définie sur $[0,+\infty[$. Ainsi, le réel $f(x)$ est correctement défini lorsque $1-x^2 \geqslant 0$ soit pour x dans l'intervalle $[-1,1]$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie sur l'intervalle } [-1,1]}$$

• La fonction $[x \mapsto 1-x^2]$ est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,+\infty[$ où la fonction racine est continue donc, par composition, $[x \mapsto \sqrt{1-x^2}]$ est continue sur $[-1,1]$. La valeur absolue est une application continue sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[-1,1]$ de sorte que la fonction $[x \mapsto 1+|x|]$ est continue sur $[-1,1]$. De plus, cette application ne s'annule pas sur $[-1,1]$. Finalement, on peut conclure, par quotient, que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien continue sur } [-1,1]}$

• Il est clair que le domaine $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0 et :

$\forall x \in [-1,1], \quad f(-x) = \dfrac{\sqrt{1-(-x)^2}}{1+|-x|} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+|x|} = f(x)$ aussi $\boxed{f \text{ est une application paire}}$.

$$\boxed{\text{Il n'est donc pas nécessaire d'étudier } f \text{ sur } [-1,1] \text{ : une étude sur } [0,1] \text{ suffit}}$$

2) Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et préciser le nombre dérivé $f'(x)$. Expliciter les abscisses des points où la courbe représentative de f dans un repère orthogonal possède une tangente parallèle aux axes du repère.

$\boxed{\text{Les théorèmes usuels permettent de justifier la dérivabilité de } f \text{ sur }]-1,0[\text{ et sur }]0,1[.}$

En effet, La fonction $[x \mapsto 1-x^2]$ est dérivables sur $]-1,1[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ où la fonction racine est dérivable donc, par composition, $[x \mapsto \sqrt{1-x^2}]$ est dérivable sur $]-1,1[$. La valeur absolue est une application dérivable sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$ de sorte que la fonction $[x \mapsto 1+|x|]$ aussi. De plus, cette application ne s'annule pas sur ces intervalles. On peut donc conclure, par quotient, que f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$.

Calculons le nombre dérivé $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$: si $x \in]0,1[$ alors $x>0$ d'où $|x|=x$ et :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} = \dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1+x} = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. On reconnaît une expression de la forme $f=\sqrt{u}$ où $[u : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}]$

aussi : $\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Or : $u(x) = \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2-(1+x)}{1+x} = \dfrac{2}{1+x}-1$ aussi $u'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$

Finalement, après simplification : $\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = -\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

On en déduit le nombre dérivé pour $x \in]-1,0[$: $\forall x \in]-1,0[, \quad f(x) = f(-x)$ aussi

$f'(x) = -f'(-x) = -\left(-\dfrac{1}{(1+(-x))\sqrt{1-(-x)^2}}\right) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ soit finalement : $\boxed{\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[, \quad f'(x) = \dfrac{\text{sg}(x)}{(1+|x|)\sqrt{1-x^2}}}$

• De même, par parité, l'étude de la dérivabilité en 1 permet de conclure également sur la situation en -1.

Au voisinage de 1, par exemple sur $]0,1[$, $x>0$ et donc : $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et $f(1)=0$ aussi :

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\xrightarrow[x\to 1^-]{}-\infty$ $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est donc pas dérivable en 1 et en } -1}$ néanmoins

$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ dans un repère orthogonal possède une tangente verticale aux points d'abscisses } x=1 \text{ et } x=-1}$

Remarque : On peut aussi utiliser le théorème de prolongement d'une dérivée. Ici : $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\right)=-\infty$.

Le théorème permet donc de conclure à la non-dérivabilité en 1 et à l'existence de la tangente verticale.

• Il reste à étudier la dérivabilité en 0. L'approche la plus rapide consiste à utiliser le théorème de prolongement d'une dérivée.

Si $x\in]0,1[$, $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\xrightarrow[x\to 0^+]{}-1$ aussi f est dérivable à droite en 0 avec une dérivée à droite $f'_d(0)=-1$

Si $x\in]-1,0[$, $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\xrightarrow[x\to 0^-]{}1$ aussi f est dérivable à gauche en 0 avec une dérivée à gauche $f'_g(0)=1$

puisque les dérivées à droite et à gauche existent mais diffèrent, $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ mais il y a deux demi-tangentes de pentes 1 et -1 au point d'abscisse 0.

On retrouve le même résultat en utilisant un taux d'accroissement : $\forall x\in]0,1[$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et $f(0)=1$ aussi

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}}=\dfrac{1-\frac{1}{2}x+x\varepsilon(-x)-\left(1+\frac{1}{2}x+x\varepsilon(x)\right)}{x\sqrt{1+x}}$ en utilisant le développement limité de $\sqrt{1+u}$ si $u\to 0$1

soit $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\dfrac{1+\varepsilon(x)-\varepsilon(-x)}{1+x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}-1$ et, par parité : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(-t)-f(0)}{-t}=-\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=1$

• Comme $f'(x)$ ne s'annule pas sur $]-1,0[\cup]0,1[$,

$\boxed{\text{il n'y a donc pas de points de la courbe représentative de } f \text{ où la tangente est horizontale.}}$

EXERCICE N°5 *Étude guidée d'une fonction*

0) *Question préliminaire* : Prouver que, pour tout réel x, $e^{2x}-e^x+1>0$

Le discriminant de X^2-X+1 est $\Delta=-3<0$ donc on sait que, pour tout X réel, $X^2-X+1>0$

De ce fait : $\forall x\in\mathbb{R},\quad e^{2x}-e^x+1=(e^x)^2-e^x+1>0$ donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad e^{2x}-e^x+1>0}$

I) *Une première application...* On définit la fonction f par l'expression : $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$

I-1) Justifier soigneusement que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Les applications $[x\mapsto 2e^{2x}-e^x]$ et $[x\mapsto e^{2x}-e^x+1]$ sont clairement continues sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes usuelles et on vient de montrer que $[x\mapsto e^{2x}-e^x+1]$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ de sorte que $\boxed{\text{le quotient } f \text{ est également définie et continue sur } \mathbb{R}}$

I-2) Établir que $f(x)$ a le signe de $2e^x-1$ sur $\mathbb{R}$

On remarque que : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{e^x(2e^x-1)}{e^{2x}-e^x+1}$ Or, on a prouvé que, pour tout x réel, $e^{2x}-e^x+1>0$ et on sait aussi que $e^x>0$ de ce fait $\boxed{\text{le réel } f(x) \text{ a le signe de } 2e^x-1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

II) On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$
et on note Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

II-1) Démontrer que F est une primitive de f

On peut procéder de deux façons pour établir ce résultat :

Si on pense plutôt primitive...

On remarque que :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) &= \frac{(e^{2x}-e^x)'}{e^{2x}-e^x+1}\\ &= \Big(\ln|e^{2x}-e^x+1|\Big)'\\ &= \Big(\ln(e^{2x}-e^x+1)\Big)'\\ \text{car } e^{2x}-e^x+1>0 & \\ &= F'(x)\end{aligned}$$

et la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Si on préfère les dérivées...

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la composée de la fonction $[x\mapsto e^{2x}-e^x+1]$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives par la fonction ln qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x)=\frac{(e^{2x}-e^x)'}{e^{2x}-e^x+1}=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}=f(x)$$

ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F'=f$: c'est une primitive de f.

on a donc justifié que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$

II-2) Donner le tableau des variations de F

Puisque F est une primitive de f, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ aussi $F'(x) = f(x)$ a le signe de $2e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question I-2). Dés lors :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2 \quad$ et $\quad F'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
F	0	$\searrow$	$\ln 3 - 2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

• $F(-\ln 2) = \ln\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - 2\ln 2$

• $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $e^{2x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ aussi $e^{2x} - e^x + 1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$ (somme)
puis $F(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ (composition)

• On a : $e^{2x} - e^x + 1 = e^{2x} \times (1 - e^{-x} + e^{-2x})$ or $e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ aussi :

$$\left.\begin{array}{r} 1 - e^{-x} + e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \\ e^{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow e^{2x} - e^x + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ et enfin } F(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{(composition)}$$

II-3) Montrer que la courbe Γ possède deux asymptotes dont on précisera des équations.

• Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ on peut affirmer que $\boxed{\Gamma \text{ possède une asymptote horizontale d'équation } y = 0}$

• Étudions par ailleurs la branche infinie en $+\infty$:

- on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{x} = \dfrac{\ln\left(e^{2x} \times (1 - e^{-x} + e^{-2x})\right)}{x} = 2 + \dfrac{1}{x} \times \ln(1 - e^{-x} - e^{-2x})$

or $\quad 1 - e^{-x} + e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad$ donc $\quad \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad$ et aussi $\quad \frac{1}{x} \times \ln(1 - e^{-x} - e^{-2x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 2$

- on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - 2x = \left(2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})\right) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

On a donc prouvé que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 2x \text{ est une asymptote oblique à la courbe } \Gamma}$

II-4) Montrer que Γ rencontre ses asymptotes en un unique point dont on donnera les coordonnées.
Préciser une équation de la tangente à Γ en ce point. Préciser également la position de Γ par rapports aux asymptotes.

• La courbe Γ rencontre l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ au point d'abscisse x si et seulement si $F(x) = 0$.
Or : $F(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + 1 = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e\underbrace{e^x}_{\neq 0}(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

donc Γ rencontre la droite d'équation $y = 0$ uniquement à l'origine du repère. Mais, l'origine est aussi un point de l'autre asymptote d'équation $y = 2x$ Ainsi, $\boxed{\text{la courbe } \Gamma \text{ rencontre ses asymptotes uniquement à l'origine}}$

• La fonction F est dérivable en 0 donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = F'(0)x + F(0) = f(0)x + 0$
or $f(0) = \frac{2-1}{1-1+1} = 1$ donc $\boxed{\text{la tangente à l'origine a pour équation } y = x}$

• On remarque que : $\forall x < 0, \quad F(x) = \ln\left(1 + \overbrace{e^x \underbrace{(e^x - 1)}_{<0}}^{<0}\right) < 0 \quad$ et $\quad \forall x > 0, \quad F(x) = \ln\left(1 + \overbrace{e^x \underbrace{(e^x - 1)}_{>0}}^{>0}\right) > 0$

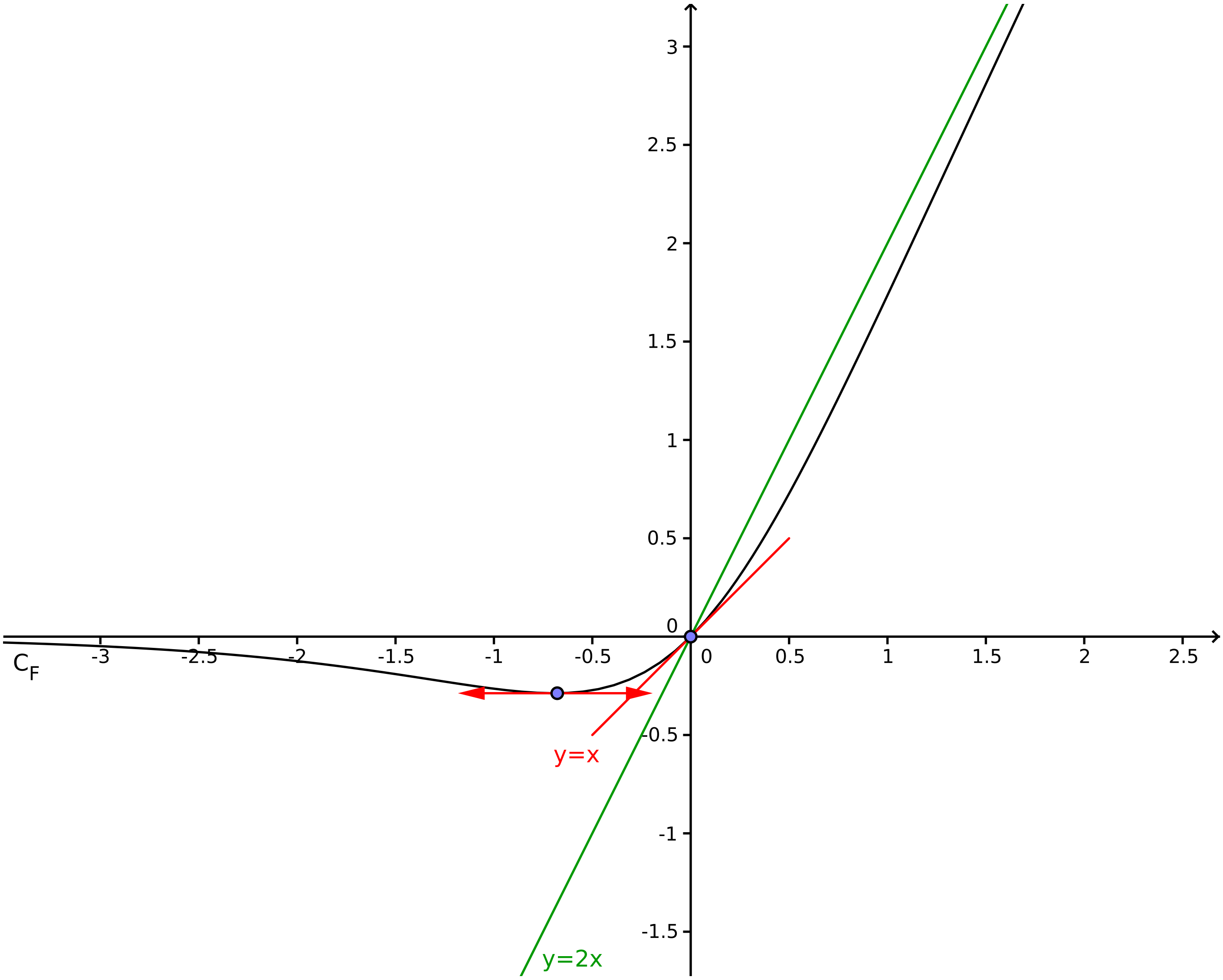
donc on peut affirmer que $\boxed{\Gamma \text{ est située sous son asymptote horizontale lorsque } x < 0 \text{ et au dessus lorsque } x > 0}$

• De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = \ln\left(1 + e^{-2x}(1 - e^x)\right)$ de sorte que :

$\forall x < 0, \quad F(x) - 2x = \ln\left(1 + \overbrace{e^{-2x} \underbrace{(1 - e^x)}_{>0}}^{>0}\right) > 0 \quad$ et $\quad \forall x > 0, \quad F(x) - 2x = \ln\left(1 + \overbrace{e^{-2x} \underbrace{(1 - e^x)}_{<0}}^{<0}\right) < 0$ et on peut affirmer que $\boxed{\Gamma \text{ est située au dessus de son asymptote oblique lorsque } x < 0 \text{ et en dessus lorsque } x > 0}$

II-5) Donner l'allure de la courbe Γ. *Unité graphique : 2 cm* *On donne* $\ln 2 \simeq 0,7$ *et* $\ln 3 \simeq 1,1$

Attention à bien respecter les unités ! On attend sur votre dessin le point où il y a une tangente horizontale ainsi que cette tangente, la mise en évidence des 2 asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci, la tangente demandée dans le sujet et, enfin, une allure globale de la courbe.



Courbe représentative de la fonction F d'équation $y = F(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$