

Correction du DM n° 2 des élèves de PTSI

EXERCICE N°1

Une équation de Riccati

On se propose de résoudre sur l'intervalle le plus grand possible inclus dans $]0, +\infty[$

l'équation différentielle non linéaire du premier ordre (E) $y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2$

1) Déterminer une solution particulière y_0 de (E) sur $]0, +\infty[$ qui soit une fonction affine.

On cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

y_0 solution de (E) sur $]0, +\infty[\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad a - \frac{ax+b}{x} - (ax+b)^2 = -9x^2 \Leftrightarrow \forall x > 0, \quad -\frac{b}{x} - a^2x^2 - 2abx - b^2 = -9x^2$

Aussi, il suffit que : $a^2 = 9$ et $b = 0$ de sorte qu'on peut prendre $a = 3$ et $b = 0$

Une solution particulière affine de (E) sur $]0, +\infty[$ est $[y_0 : x \mapsto 3x]$

On admettra alors (théorème de Cauchy-Lipschitz), que si y est une autre solution de (E) définie sur un intervalle I alors

$$\forall x \in I, \quad y(x) \neq y_0(x)$$

De ce fait, on peut donc associer à toute solution y différente de y_0 la fonction z telle que $y = y_0 - \frac{1}{z}$

2) Prouver que z est alors solution sur I de $(E_1) : \quad z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z = 1$.

Comme $y_0 - y$ ne s'annule pas sur I (puisque $\forall x \in I, y(x) \neq y_0(x)$), alors $z = \frac{1}{y_0 - y}$ est définie sur I

De plus, par passage à l'inverse, elle est dérivable sur I puisque $y_0 - y$ est dérivable sur I et ne s'y annule pas.

1er méthode : on a $\forall x \in I, \quad z'(x) = -\frac{y_0'(x) - y'(x)}{(y_0(x) - y(x))^2} = -\frac{3 - y'(x)}{(3x - y(x))^2}$ aussi pour tout x dans I :

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) - 1 = -\frac{3 - y'(x)}{(3x - y(x))^2} + \left(6x + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{3x - y(x)} - 1 = \frac{-3 + y'(x) + (6x + \frac{1}{x})(3x - y(x)) - (3x - y(x))^2}{x(3x - y(x))^2}$$

$$\text{soit } \forall x \in I, \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) - 1 = \frac{-3 + y'(x) + 18x^2 + 3 - 6xy(x) - \frac{y(x)}{x} - 9x^2 + 6xy(x) - y^2(x)}{x(3x - y(x))^2}$$

$$= \frac{\overbrace{y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) + 9x^2}^{=0}}{x(3x - y(x))^2} = 0 \quad \text{puisque } y \text{ est solution de (E)}$$

2ème méthode : on a $\forall x \in I, \quad y'(x) = \left(y_0(x) - \frac{1}{z(x)}\right)' = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)}$ et on sait que y est solution de (E) donc :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2 \Leftrightarrow \forall x \in I, \quad 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - \frac{1}{x} \times \left(3x - \frac{1}{z(x)}\right) - \left(3x - \frac{1}{z(x)}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{x} \times \frac{1}{z(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = -9x^2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{1}{x} \times \frac{1}{z(x)} + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad z'(x) + \frac{1}{x}z(x) + 6xz(x) - 1 = 0 \quad \text{en multipliant par } z(x) \neq 0 \text{ sur } I$$

Ainsi : z est dérivable sur I et $\forall x \in I, \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1$ donc z est bien solution de (E_1) sur I

3) Résoudre (E_1) sur $]0, +\infty[$.

(E_1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en z' sur $]0, +\infty[$.

• Solutions homogène Une primitive sur $]0, +\infty[$ de a donnée par $a(x) = 6x + \frac{1}{x}$ est A où $A(x) = 3x^2 + \ln|x|$

Les solutions homogènes de (E_1) sont les fonctions h_C où $h_C(x) = Ce^{-3x^2 - \ln|x|} = \frac{C}{|x|}e^{-3x^2} = \frac{C}{x}e^{-3x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• Solutions particulière On utilise la méthode de variations de la constante en cherchant une solution z_0

sous la forme $z_0(x) = C(x)h(x)$ avec C fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et h une solution homogène ($h(x) = \frac{e^{-3x^2}}{x}$)

$$z_0 \text{ solution de } (E_1) \text{ sur }]0, +\infty[\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \underbrace{C'(x)h(x) + C(x)h'(x)}_{=0} + \left(6x + \frac{1}{x}\right)h(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad C'(x) = xe^{3x^2} = \frac{1}{6} \times (6x) \times e^{3x^2} = \left(\frac{e^{3x^2}}{6}\right)' \quad \text{primitive du type } u'e^u$$

$$\text{Une solution particulière de } (E_1) \text{ est donc } z_0 \text{ avec } z_0(x) = \frac{e^{3x^2}}{6} \times \frac{e^{-3x^2}}{x} = \frac{1}{6x}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ est donc $\mathcal{S} = \left\{ \left[x \mapsto \frac{1}{6x} + \frac{C}{x}e^{-3x^2} \right] \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

- 4) On introduit f_C donnée par $f_C(x) = 1 + 6Ce^{-3x^2}$. Démontrer que : f_C ne s'annule pas sur $]0; +\infty[\Leftrightarrow C \geq -\frac{1}{6}$

On pourra distinguer le cas $C > 0$, $C = 0$ et $C < 0$ et étudier les variations de f_C sur $]0; +\infty[$

Par des compositions usuels, on sait que $[x \mapsto e^{-3x^2}]$ est décroissante sur $]0; +\infty[$ aussi le sens de variations de f_C dépend du signe de C . De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} f_C(x) = 1 + 6C$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_C(x) = 1$

1er cas : $C > 0$ alors f_C décroît de $1 + 6C > 1$ à 1 sur $]0; +\infty[$ et donc ne s'annule pas.

2eme cas : $C = 0$ alors f_C est constante à 1 donc ne s'annule pas.

3eme cas : $C < 0$ alors f_C croît de $1 + 6C < 1$ à 1

- si $1 + 6C \geq 0 \Leftrightarrow C \geq -\frac{1}{6}$ alors f_C ne s'annule pas

- si $1 + 6C < 0 \Leftrightarrow C < -\frac{1}{6}$ alors, puisque f_C est continue et monotone sur $]0; +\infty[$ dans $]1 + 6C, 1[$ et que $0 \in]1 + 6C, 1[$, on peut conclure que f_C s'annule sur $]0; +\infty[$ (Théorème des valeurs intermédiaires)

Conclusion : $[f_C : x \mapsto 1 + 6Ce^{-3x^2}]$ ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ si et seulement si $C \geq -\frac{1}{6}$

- 5) Donner enfin les solutions de (E) définie sur $]0; +\infty[$. (On pourra utiliser Maple pour faire les calculs.)

• Si y est une solution de (E) sur $]0; +\infty[$ alors la fonction z associée est solution de (E_1) sur $]0; +\infty[$ donc, d'après 3) :

$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, \quad z(x) = \frac{1 + 6Ce^{-3x^2}}{6x} = \frac{f_C(x)}{6x}$ mais aussi z ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ donc d'après 4), on a $C \geq -\frac{1}{6}$

et donc puisque $y = y_0 - \frac{1}{z}$, on a obtenu : y est solution de (E) sur $]0; +\infty[\Rightarrow \exists C \geq -\frac{1}{6}, \quad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + 6Ce^{-3x^2}}$

Attention, le raisonnement de l'exercice est mené en implication... Il faut vérifier une réciproque !

• Réciproquement, la fonction y donnée par $y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + 6Ce^{-3x^2}}$ où $C \geq -\frac{1}{6}$ définit une application dérivable sur $]0; +\infty[$

et on vérifie que c'est une solution de (E) sur $]0; +\infty[$ en montrant : $\forall x > 0, \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} + y^2(x) + 9x^2 = 0$

EXERCICE N°4 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = \sin(ax)e^{-x}$ (E) en fonction du paramètre réel a .

• Solutions homogènes : On résout $y'' + 2y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 2 = 0$

Le discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$ donc les racines sont complexes conjuguées : $\frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$ et

$-1 - i$ et l'ensemble des solutions homogènes est donc $\mathcal{S}_H = \left\{ \left[x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) \right] \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

• Solution particulière : On remarque que : $\sin(ax)e^{-x} = \Im m(e^{iax}e^{-x}) = \Im m(e^{(-1+ia)x})$

On cherche donc une solution particulière y_0 sous la forme $y_0 = \Im m(z_0)$ avec z_0 solution de $(*)$: $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+ia)x}$

Le second membre de $(*)$ est alors de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $P(x) = 1$ et $m = -1 + ia$. On recherche une solution z_0 avec $z_0(x) = Q(x)e^{mx}$ où l'on choisit le degré de Q selon que m soit racine ou non de l'équation caractéristique.

1er cas : $a \notin \{-1, 1\}$ alors $-1 + ia$ n'est pas racine de l'équation caractéristique alors $\deg Q = \deg P = 0$ soit $Q(x) = \alpha \in \mathbb{C}$ alors $z_0(x) = \alpha e^{(-1+ia)x}$ (x2), $z_0'(x) = (-1 + ia)\alpha e^{(-1+ia)x}$ (x2) et $z_0''(x) = (-1 + ia)^2 \alpha e^{(-1+ia)x} = (1 - a^2 - 2ia)\alpha e^{(-1+ia)x}$ (x1)

z_0 solution de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2 + 2(-1 + ia) + (1 - a^2 - 2ia))\alpha e^{(-1+ia)x} = e^{(-1+ia)x} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{1 - a^2}$ ($1 - a^2 \neq 0$ ouf!)

de sorte que la solution particulière y_0 est donnée par $y_0(x) = \Im m\left(\frac{e^{-x}}{1 - a^2}e^{iax}\right) = \frac{e^{-x}}{1 - a^2} \sin(ax)$

2nd cas : $a \in \{-1, 1\}$ alors $-1 + ia$ est racine simple alors $\deg Q = \deg P + 1 = 1$ soit $Q(x) = \alpha x + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

alors $z_0(x) = (\alpha x + \beta)e^{(-1+ia)x}$ (x2), $z_0'(x) = (\alpha + (-1 + ia)(\alpha x + \beta))e^{(-1+ia)x} = ((-1 + ia)\alpha x + \alpha + (-1 + ia)\beta)e^{(-1+ia)x}$ (x2)

et $z_0''(x) = ((-1 + ia)\alpha + (-1 + ia)((-1 + ia)\alpha x + \alpha + (-1 + ia)\beta))e^{(-1+ia)x} = ((1 - a^2 - 2ia)\alpha x + 2\alpha(-1 + ia) + (1 - a^2 - 2ia)\beta)e^{(-1+ia)x}$ (x1)

z_0 solution de (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\underbrace{(2\alpha + 2(-1 + ia)\alpha + (1 - a^2 - 2ia)\alpha)}_{=1-a^2=0} x + \underbrace{(2\beta + 2\alpha + 2(-1 + ia)\beta + 2\alpha(-1 + ia) + (1 - a^2 - 2ia)\beta)}_{=(1-a^2)\beta+2ia\alpha=2ia\alpha} \right) e^{(-1+ia)x} = e^{(-1+ia)x}$

$\Leftrightarrow 2ia\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2ia} = \frac{-ia}{2}$ car $\frac{1}{a} = a$ si $a \in \{-1, 1\}$ aussi $z_0(x) = \frac{-ia}{2} x e^{(-1+ia)x} = -\frac{a}{2} x e^{-x} \times i e^{-iax}$

de sorte que la solution particulière de (E) est y_0 où $y_0(x) = \Im m(z_0(x)) = -\frac{a}{2} x e^{-x} \cos(ax)$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

- si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$: $\mathcal{S} = \left\{ \left[x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + \frac{e^{-x}}{1 - a^2} \sin(ax) \right] \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- si $a \in \{-1, 1\}$: $\mathcal{S} = \left\{ \left[x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) - \frac{a}{2} x e^{-x} \cos(ax) \right] \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

EXERCICE N°2Résolution de l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$ où θ est un paramètre réelOn considère l'équation complexe (E_θ) : $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$.On note z_1 et z_2 les deux racines complexes (éventuellement égales) de cette équation.**1)a)** Calculer le discriminant de cette équation en fonction de θ .Le discriminant de l'équation est $\Delta = (-2e^{i\theta})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4e^{2i\theta} - 4$ **b)** Montrer que si (E_θ) admet une racine réelle alors c'est une racine double (On pourra utiliser la somme et le produit des racines)

Notons z_1 et z_2 les deux racines complexes de cette équation. On sait que : $z_1 + z_2 = -\frac{-2e^{i\theta}}{1} = 2e^{i\theta}$ et $z_1z_2 = \frac{1}{1} = 1$
 $z_1z_2 = 1$ entraîne qu'une racine de (E_θ) n'est jamais nulle et que, si l'une des racines est un nombre réel, l'autre aussi.
 Par exemple : $z_1 \in \mathbb{R}$ et $z_1 \neq 0 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{z_1} \in \mathbb{R}$. Par conséquent, la somme $z_1 + z_2$ des racines est aussi un réel.
 Donc : $z_1 + z_2 = 2e^{i\theta} \in \mathbb{R} \Rightarrow \theta \equiv 0 [\pi] \Rightarrow \theta \in \{0, \pi, 2\pi\}$ car $\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \Delta = 4e^{2i\theta} - 4 = 0$
 Ainsi, si l'une des racines de (E_θ) est réel, alors le discriminant de (E_θ) est nul donc cette racine est en fait une racine double.

c) Montrer que les parties imaginaires de z_1 et z_2 sont soit toutes deux nulles soit de signes contraires.

Vu que : $z_2 = \frac{1}{z_1}$ si $z_1 = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $z_2 = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ aussi $\Im m(z_2) = -\frac{b}{a^2 + b^2} = -\frac{\Im m(z_1)}{|z_1|^2}$
 Mais alors : soit $\Im m(z_1) = 0$ et alors $\Im m(z_2) = \frac{-\Im m(z_1)}{|z_1|^2} = 0$ donc les deux parties imaginaires sont nulles
 soit $\Im m(z_1) \neq 0$ et alors $\Im m(z_1)\Im m(z_2) = -\frac{(\Im m(z_1))^2}{|z_1|^2} < 0$ donc les deux parties imaginaires sont de signes contraires.

2)a) Démontrer que, pour $\theta \in [0; 2\pi]$, $e^{2i\theta} - 1 = 2\sin(\theta)[- \sin \theta + i \cos \theta]$ $\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad e^{2i\theta} - 1 = e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = e^{i\theta} \times 2i \sin(\theta) = 2\sin(\theta) \times i \times (\cos \theta + i \sin \theta) = 2\sin(\theta)[- \sin \theta + i \cos \theta]$ **b)** Déterminer alors, sous forme exponentielle, les racines carrées de $e^{2i\theta} - 1$

• Si $\theta \in [0, \pi]$ alors $\sin(\theta) \geq 0$ et l'écriture exponentielle de $e^{2i\theta} - 1$ est : $e^{2i\theta} - 1 = 2\sin(\theta)e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ car $\begin{cases} -\sin \theta = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$
 aussi $e^{2i\theta} - 1 = \left(\sqrt{2\sin \theta}e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}\right)^2$ et donc, si $\theta \in [0, \pi]$, les racines carrées de $e^{2i\theta} - 1$ sont $\sqrt{2\sin \theta}e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$ et $-\sqrt{2\sin \theta}e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$
 • Si $\theta \in]\pi, 2\pi]$ alors $\sin(\theta) \leq 0$ et l'écriture exponentielle de $e^{2i\theta} - 1$ est : $e^{2i\theta} - 1 = -2\sin(\theta)e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$ car $\begin{cases} \sin \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ -\cos \theta = \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$
 aussi $e^{2i\theta} - 1 = \left(\sqrt{2|\sin \theta|}e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}\right)^2$ et si $\theta \in [\pi, 2\pi]$, les racines carrées de $e^{2i\theta} - 1$ sont $\sqrt{2|\sin \theta|}e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$ et $-\sqrt{2|\sin \theta|}e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$

c) En déduire les racines de l'équation (E) dans le cas où $\theta \in [0; 2\pi]$ On a : $\Delta = 2^2 \times (e^{2i\theta} - 1)$ de sorte qu'on peut déterminer dans chaque cas une racine carrée de Δ • Dans le cas où $\theta \in [0, \pi]$:une racine carrée de Δ est $\delta = 2 \times \sqrt{2\sin \theta}e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} = 2(1 + i)\sqrt{\sin \theta}e^{i\frac{\theta}{2}}$ car $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$ Les solutions de (E_θ) sont $z_+ = \frac{2e^{i\theta} + 2(1 + i)\sqrt{\sin \theta}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2} = e^{i\theta} + (1 + i)\sqrt{\sin \theta}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_- = e^{i\theta} - (1 + i)\sqrt{\sin \theta}e^{i\frac{\theta}{2}}$ • Dans le cas où $\theta \in [\pi, 2\pi]$:une racine carrée de Δ est $\delta = 2 \times \sqrt{2|\sin \theta|}e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} = 2(1 - i)\sqrt{|\sin \theta|}e^{i\frac{\theta}{2}}$ car $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$ Les solutions de (E_θ) sont $z_+ = \frac{2e^{i\theta} + 2(1 - i)\sqrt{|\sin \theta|}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2} = e^{i\theta} + (1 - i)\sqrt{|\sin \theta|}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_- = e^{i\theta} - (1 - i)\sqrt{|\sin \theta|}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Calcul de la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on définit pour $z \in \mathbb{C}$ les nombres complexes $P(z) = (z+1)^n - 1$ et $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} z^k$

On appelle aussi $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les n solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$

telles que $z_0 = 0$ et $\arg(z_1) < \arg(z_2) < \dots < \arg(z_{n-1})$ où $\arg(z)$ est l'argument principal de z dans $[0, 2\pi[$

1) Preliminaire : Si $\theta \in [0, 2\pi[$, donner la forme exponentielle de $e^{i\theta} - 1$

$$\text{Pour tout } \theta \text{ dans } [0, 2\pi[, \quad e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\pi+\theta}{2}}$$

$$\text{aussi } \forall \theta \in [0, 2\pi[, \quad e^{i\theta} - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\pi+\theta}{2}} \quad \text{qui est bien la forme exponentielle car } 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0 \quad \text{si } \frac{\theta}{2} \in [0, \pi[$$

2) Résoudre $P(z) = 0$ et identifier les nombres complexes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$$

$$\text{L'ensemble des solutions de } P(z) = 0 \text{ est donc } \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

On sait que $z_0 = 0$ aussi il reste à identifier $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ parmi les nombres de $\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \mid k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$

Or : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad 0 < \frac{2k\pi}{n} < 2\pi$ et aussi donc, d'après 1), on connaît la forme exponentielle de $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$:

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)} \quad \text{de sorte qu'on trouve l'argument principal : } \arg\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}$$

puisque, si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} < \frac{\pi}{2} + \pi$ et donc $\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$

de sorte que : $\arg\left(e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right) < \arg\left(e^{\frac{4i\pi}{n}} - 1\right) < \dots < \arg\left(e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} - 1\right)$ ce qui permet d'identifier les $(z_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$

$$z_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)}$$

3) Démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = zQ(z)$

En utilisant la formule du binôme, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^k = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p+1} z^{p+1} \quad \text{en posant } p = k-1$$

$$\text{aussi : } \forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} z^{k+1} \quad \text{car l'indice est muet}$$

$$= z \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} z^k = zQ(z) \quad \text{en factorisant par } z \quad \text{donc} \quad \boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = zQ(z)}$$

Nous verrons un résultat (unicité du quotient et reste dans la division euclidienne) justifiant que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)$

4) En admettant ce résultat et en calculant $Q(0)$ de deux façons, déterminer la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

$$\text{On a, d'une part, } Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} z^k \quad \text{donc, en évaluant en 0,} \quad \boxed{Q(0) = \binom{n}{1} = n} \quad \text{mais d'autre part :}$$

$$\begin{aligned} Q(z) &= \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k) \quad \text{donc} \quad Q(0) = \prod_{k=1}^{n-1} (-z_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (-2) \times \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= (-2)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= (-2)^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \exp\left(\frac{i(n-1)\pi}{2} + \frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k\right) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \underbrace{\exp(i(n-1)\pi)}_{=(-1)^{n-1}} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, on a donc :} \quad Q(0) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$$