Correction du DM n° 4 des élèves de PTSI

EXERCICE N°1 ABC et $A'B'C'$ sont des triangles non aplatis du plan.

On appelle $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ les parallèles respectives à (AB), (CA) et (BC) passant respectivement par C', B' et A' et Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les parallèles respectives à $(A'B')$, $(C'A')$ et $(B'C')$ passant respectivement par C, B et A.

L'objectif de l'exercice est de prouver que

si $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes alors il en va de même pour Δ_1, Δ_2 et Δ_3

On utilisera pour cela le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et on notera $A'(a_1,a_2)$, $B'(b_1,b_2)$ et $C'(c_1,c_2)$ les coordonnées des points A', B' et C' dans ce repère qui seront des paramètres du problème.

1) Montrer que : $\det(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}) = k\times\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ où k est un réel à déterminer en fonction des paramètres.

Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, on a donc : $\overrightarrow{C'B'}\begin{pmatrix}b_1-c_1\\ b_2-c_2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C'A'}\begin{pmatrix}a_1-c_1\\ a_2-c_2\end{pmatrix}$

soit $\overrightarrow{C'B'} = (b_1-c_1)\overrightarrow{AB}+(b_2-c_2)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{C'A'} = (a_1-c_1)\overrightarrow{AB}+(a_2-c_2)\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}\right) &= \det\left((a_1-c_1)\overrightarrow{AB}+(a_2-c_2)\overrightarrow{AC},(b_1-c_1)\overrightarrow{AB}+(b_2-c_2)\overrightarrow{AC}\right)\\
&= (a_1-c_1)(b_2-c_2)\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+(a_2-c_2)(b_1-c_1)\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) \quad \text{par bilinéarité}\\
&= \Big((a_1-c_1)(b_2-c_2)-(a_2-c_2)(b_1-c_1)\Big)\times\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \quad \text{par antisymétrie}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que $\boxed{\det\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}\right) = k\times\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \quad \text{où } k=(a_1-c_1)(b_2-c_2)-(a_2-c_2)(b_1-c_1)}$

2) a) Déterminer des équations de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans ce repère.
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection P de ces deux droites ?

• $\mathcal{D}_1$ est la parallèle à (AB) qui passe par C' donc $\mathcal{D}_1$ passe par $C'(c_1,c_2)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$M(x,y)\in\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaire $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{C'M},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-c_1 & 1\\ y-c_2 & 0\end{vmatrix}\underbrace{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow -(y-c_2)=0$

$\boxed{\text{Une équation de la droite } \mathcal{D}_1 \text{ dans le repère } (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \text{ est } y=c_2}$

• $\mathcal{D}_2$ est la parallèle à (AC) qui passe par B' donc $\mathcal{D}_2$ passe par $B'(b_1,b_2)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

On peut adopter une rédaction analogue à ce qu'on a fait auparavant ou utiliser cette autre rédaction :
$\mathcal{D}_2$ est dirigée par $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ donc elle admet une équation du type $1\times x-0\times y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$ est à déterminer. Or, puisque $B'(b_1,b_2)\in\mathcal{D}_1$, on a : $b_1+c=0$ soit $c=-b_1$

$\boxed{\text{Finalement, une équation de la droite } \mathcal{D}_2 \text{ dans le repère } (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \text{ est } x=b_1}$

• On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix}x_P\\y_P\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ du point d'intersection P de ces deux droites.

$P(x_P,y_P)\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \begin{cases}y_P=c_2\\x_P=b_1\end{cases}$ puisque les coordonnées de P doivent vérifier les équations des deux droites.

$\boxed{\text{Le point d'intersection } P \text{ de } \mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ a pour coordonnées } P(b_1,c_2)}$

b) Donner une équation de $\mathcal{D}_3$ dans ce repère.
En déduire que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes si et seulement si $b_1+c_2=a_1+a_2$ $(*)$

• $\mathcal{D}_3$ est la parallèle à (BC) qui passe par A' donc $\mathcal{D}_1$ passe par $A'(a_1,a_2)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
M(x,y)\in\mathcal{D}_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaire} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{BC}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x-a_1 & -1\\ y-a_2 & 1\end{vmatrix}\underbrace{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\neq 0}=0\\
&\Leftrightarrow \quad x-a_1+y-a_2=0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Une équation de la droite } \mathcal{D}_3 \text{ dans le repère } (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \text{ est } x+y=a_1+a_2}$

• $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes si et seulement si $\mathcal{D}_3$ passe par le point d'intersection P de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$
autrement dit : $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes $\Leftrightarrow P(b_1,c_2)\in\mathcal{D}_3 \Leftrightarrow b_1+c_2-a_1-a_2=0$

On a donc démontré que $\boxed{\text{les droites } \mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ sont concourantes si et seulement si } \quad b_1+c_2=a_1+a_2 \quad (*)}$

3) Donner des équations de Δ_1, Δ_2 et Δ_3 dans le repère.

• Δ_1 est la parallèle à $(A'B')$ qui passe par C donc Δ_1 passe par $C(0,1)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$

$$M(x,y)\in\Delta_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} \text{ sont colinéaire} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{A'B'}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x & b_1-a_1 \\ y-1 & b_2-a_2 \end{vmatrix}\underbrace{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (b_2-a_2)x-(b_1-a_1)(y-1)=0$$

$$\boxed{\text{Une équation de la droite } \Delta_1 \text{ dans le repère } (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \text{ est } (b_2-a_2)x-(b_1-a_1)y=a_1-b_1}$$

• Δ_2 est la parallèle à $(C'A')$ qui passe par B donc Δ_2 passe par $B(1,0)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix} c_1-a_1 \\ c_2-a_2 \end{pmatrix}$

$$M(x,y)\in\Delta_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{A'C'} \text{ sont colinéaire} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{A'C'}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x-1 & c_1-a_1 \\ y & c_2-a_2 \end{vmatrix}\underbrace{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (c_2-a_2)(x-1)-(c_1-a_1)y=0$$

$$\boxed{\text{Une équation de la droite } \Delta_2 \text{ dans le repère } (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \text{ est } (c_2-a_2)x-(c_1-a_1)y=c_2-a_2}$$

• Δ_3 est la parallèle à $(B'C')$ qui passe par A donc Δ_3 passe par $A(0,0)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix} c_1-b_1 \\ c_2-b_2 \end{pmatrix}$

$$M(x,y)\in\Delta_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{B'C'} \text{ sont colinéaire} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x & c_1-b_1 \\ y & c_2-b_2 \end{vmatrix}\underbrace{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (c_2-b_2)x-(c_1-b_1)y=0$$

$$\boxed{\text{Une équation de la droite } \Delta_3 \text{ dans le repère } (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \text{ est } (c_2-b_2)x-(c_1-b_1)y=0}$$

4) Démontrer que, si $(*)$ est réalisée, alors $\quad M(x,y)\in\Delta_1\cap\Delta_2\cap\Delta_3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (b_2-c_2)x-(b_1-c_1)y=0 \\ (c_2-a_2)x-(c_1-a_1)y=c_2-a_2 \end{cases}$

On suppose que $(*)$ est réalisée c'est à dire que $\quad b_1+c_2=a_1+a_2 \quad$ soit encore que $\quad a_1-b_1-(c_2-a_2)=0$

$$M(x,y)\in\Delta_1\cap\Delta_2\cap\Delta_3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (b_2-a_2)x-(b_1-a_1)y=a_1-b_1 & (L_1) \\ (c_2-a_2)x-(c_1-a_1)y=c_2-a_2 & (L_2) \\ (c_2-b_2)x-(c_1-b_1)y=0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (b_2-c_2)x-(b_1-c_1)y=a_1-b_1-(c_2-a_2)=0 & (L_1\leftarrow L_1-L_2) \\ (c_2-a_2)x-(c_1-a_1)y=c_2-a_2 & (L_2) \\ (c_2-b_2)x-(c_1-b_1)y=0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (b_2-c_2)x-(b_1-c_1)y=0 & (L_1) \\ (c_2-a_2)x-(c_1-a_1)y=c_2-a_2 & (L_2) \end{cases} \qquad \text{puisque } L_3 \text{ correspond à } -L_1$$

5) Conclure.

On suppose que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes. Alors : $\quad b_1+c_2=a_1+a_2 \quad (*)$

Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes si et seulement si $\Delta_1\cap\Delta_2\cap\Delta_3$ est réduit à un point.

si et seulement si $\begin{cases} (b_2-a_2)x-(b_1-a_1)y=a_1-b_1 \\ (c_2-a_2)x-(c_1-a_1)y=c_2-a_2 \\ (c_2-b_2)x-(c_1-b_1)y=0 \end{cases}$ a une unique solution

si et seulement si $\begin{cases} (b_2-c_2)x-(b_1-c_1)y=0 \\ (c_2-a_2)x-(c_1-a_1)y=c_2-a_2 \end{cases}$ a une unique solution

puisque $(*)$ est réalisée

si et seulement si $\begin{vmatrix} (b_2-c_2) & -(b_1-c_1) \\ (c_2-a_2) & -(c_1-a_1) \end{vmatrix}\neq 0$

si et seulement si $-(b_2-c_2)(c_1-a_1)+(c_2-a_2)(b_1-c_1)\neq 0$

si et seulement si $(b_2-c_2)(a_1-c_1)-(b_1-c_1)(c_2-a_2)\neq 0$

Or, on sait que $A'B'C'$ et ABC sont des triangles non aplatis donc $\quad \det\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}\right)\neq 0 \quad$ et $\quad \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\neq 0$

aussi, d'après 1), on a : $\quad \det\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}\right)=\Big((b_2-c_2)(a_1-c_1)-(b_1-c_1)(c_2-a_2)\Big)\underbrace{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\neq 0}\neq 0$

soit : $\quad (b_2-c_2)(a_1-c_1)-(b_1-c_1)(c_2-a_2)\neq 0$: $\quad$ les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont donc concourantes.

On a donc finalement démontré que : $\boxed{\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ sont concourantes} \Rightarrow \Delta_1,\ \Delta_2 \text{ et } \Delta_3 \text{ sont concourantes}}$

$\boxed{\text{Exercice n°2}}$ Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. *(unité graphique 2 cm)*

C et D sont les points de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,0)$. a et b sont des réels avec $|a|>1$

1) On appelle Γ_a le cercle de centre le point de coordonnées $A_a(a,0)$ et de rayon $\sqrt{a^2-1}$

Donner une équation cartésienne de Γ_a. Représenter sur une même figure $\Gamma_{\frac{3}{2}}$, Γ_2, Γ_3, $\Gamma_{-\frac{3}{2}}$, Γ_{-2} et Γ_{-3}

On utilisera uniquement la régle (non graduée) et le compas. On pourra expliquer sur un dessin à part comment on obtient $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc...

Montrer que le rapport $\frac{MC}{MD}$ est constant lorsque M parcourt le cercle Γ_a

• Γ_a est le cercle de centre le point de coordonnées $A_a(a,0)$ et de rayon $\sqrt{a^2-1}$ donc

$$\boxed{\text{une équation cartésienne de } \Gamma_a \text{ est } \quad (x-a)^2+y^2=a^2-1 \quad \text{soit encore} \quad x^2+y^2-2ax+1=0}$$

• Le point $D(-1,0)$ n'est jamais un point de Γ_a car $(-1-a)^2+0^2-a^2+1=2+2a=2(1+a)\neq 0$ si $|a|>1$

aussi, pour tout point M de Γ_a, $MD\neq 0$, on peut donc calculer le rapport $\dfrac{MC^2}{MD^2}$.

Notons (x_M, y_M) les coordonnées de M, alors $\quad x_M^2+y_M^2-2ax_M+1=0$ de ce fait :

- si $x_M=0$ alors $y_M^2+1=0$ ce qui est absurde donc $x_M\neq 0$

- $$\frac{MC^2}{MD^2}=\frac{(x_M-1)^2+(y_M-0)^2}{(x_M+1)^2+(y_M-0)^2}=\frac{\overbrace{x_M^2+y_M^2+1}^{=2ax_M}-2x_M}{\underbrace{x_M^2+y_M^2+1}_{=2ax_M}+2x_M}=\frac{2ax_M-2x_M}{2ax_M+2x_M}=\frac{a-1}{a+1} \quad \text{car } x_M\neq 0$$

Finalement : $\boxed{\text{si } M \text{ est un point de } \Gamma_a \text{ alors } \dfrac{MC}{MD} \text{ est constant égale à } \sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}}$ On peut vérifier que $|a|>1 \Rightarrow \frac{a-1}{a+1}>0$

2) $\mathcal{C}_b$ est le cercle de centre le point de coordonnées $B_b(0,b)$ passant par C.

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}_b$. Justifier que $\mathcal{C}_b$ passe aussi par D

Représenter sur la figure précédente les cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_{-2}$

Le rayon de $\mathcal{C}_b$ est égale à la distance entre le point $C(1,0)$ et le point de coordonnées $B_b(0,b)$ soit $\sqrt{1+b^2}$

aussi $\boxed{\text{une équation cartésienne de } \mathcal{C}_b \text{ est } \quad x^2+(y-b)^2=b^2+1 \quad \text{soit encore} \quad x^2+y^2-2by-1=0}$

Comme $(-1)^2+(0-b)^2=1+b^2$, les coordonnées de D vérifient l'équation de $\mathcal{C}_b$ donc $\boxed{D\in\mathcal{C}_b}$

3) Prouver que les cercles Γ_a et $\mathcal{C}_b$ sont toujours sécants.

On note $M_0(x_0,y_0)$ un point d'intersection de ces cercles.

Donner les équations des tangentes aux cercles issues de M_0 et prouver que celles-ci sont toujours orthogonales.

• La distance séparant les centres $A_a(a,0)$ et $B_b(0,b)$ des cercles Γ_a et $\mathcal{C}_b$ est A_aB_b avec $A_aB_b{}^2=a^2+b^2$.

Démontrons que : $\quad |\sqrt{a^2-1}-\sqrt{1+b^2}|<A_aB_b<\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1+b^2}$

autrement dit : $\quad \left(\sqrt{a^2-1}-\sqrt{1+b^2}\right)^2<a^2+b^2<\left(\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1+b^2}\right)^2$ car $[x\mapsto x^2]$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Or : $\quad (\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1+b^2})^2-(a^2+b^2)=a^2-1+1+b^2+2\sqrt{a^2-1}\sqrt{1+b^2}-(a^2+b^2)=2\sqrt{a^2-1}\sqrt{1+b^2}>0$

et : $\quad (\sqrt{a^2-1}-\sqrt{1+b^2})^2-(a^2+b^2)=a^2-1+1+b^2-2\sqrt{a^2-1}\sqrt{1+b^2}-(a^2+b^2)=-2\sqrt{a^2-1}\sqrt{1+b^2}<0$

On a donc justifié que

$|\sqrt{a^2-1}-\sqrt{1+b^2}|<A_aB_b<\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1+b^2}$ où $\sqrt{a^2-1}$ est le rayon de Γ_a et $\sqrt{1+b^2}$ est celui de $\mathcal{C}_b$

aussi on peut affirmer que l'intersection $\Gamma_a\cap\mathcal{C}_b$ est constitué de deux points : $\boxed{\Gamma_a \text{ et } \mathcal{C}_b \text{ sont donc toujours sécants}}$

• Soit $M_0(x_0,y_0)$ l'un des points de $\Gamma_a\cap\mathcal{C}_b$,

-le vecteur $\overrightarrow{A_aM_0}\begin{pmatrix}x_0-a\\ y_0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la tangente $\mathcal{T}_a$ à Γ_a en $M_0(x_0,y_0)$

la tangente $\mathcal{T}_a$ a donc une équation du type $(x_0-a)x+y_0y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$ vérifie $(x_0-a)x_0+y_0^2+c=0$

aussi $c=-(\underbrace{x_0^2+y_0^2-ax_0}_{=ax_0-1 \text{ car } M_0\in\Gamma_a})=1-ax_0$ donc $\underbrace{\boxed{\text{une équation de } \mathcal{T}_a \text{ est } x_0x+y_0y-a(x+x_0)+1=0}}_{\text{à mettre en parallèle de l'équation de } \Gamma_a :\ x^2+y^2-2ax+1=0}$

-le vecteur $\overrightarrow{B_bM_0}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0-b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la tangente $\mathcal{T}_b$ à $\mathcal{C}_b$ en $M_0(x_0,y_0)$

la tangente $\mathcal{T}_b$ a donc une équation du type $x_0x+(y_0-b)y+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$ vérifie $(x_0^2+(y_0-b)y_0+d=0$

aussi $d=-(\underbrace{x_0^2+y_0^2-by_0}_{=1+by_0 \text{ car } M_0\in\mathcal{C}_b})=-1-by_0$ donc $\underbrace{\boxed{\text{une équation de } \mathcal{T}_b \text{ est } x_0x+y_0y-b(y+y_0)-1=0}}_{\text{à mettre en parallèle de l'équation de } \mathcal{C}_b :\ x^2+y^2-2by-1=0}$

Aussi, les droites $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{T}_b$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{A_aM_0}$ et $\overrightarrow{B_bM_0}$ sont orthogonaux

Or : $\quad \overrightarrow{A_aM_0}.\overrightarrow{B_bM_0}=\begin{pmatrix}x_0-a\\ y_0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_0\\ y_0-b\end{pmatrix}=x_0^2-ax_0+y_0^2-by_0=\frac{1}{2}\times\left(x_0^2+\underbrace{x_0^2-2ax_0}_{-1-y_0^2}+y_0^2+\underbrace{y_0^2-2by_0}_{1-x_0^2}\right)=0$

en utilisant que $M_0\in\Gamma_a$ et que $M_0\in\mathcal{C}_b$ et donc que (x_0,y_0) vérifient les équations de ces cercles

Les vecteurs $\overrightarrow{A_aM_0}$ et $\overrightarrow{B_bM_0}$ sont donc orthogonaux et, par suite, on a démontré que :

$\boxed{\text{si } M_0 \text{ est un point d'intersection de } \Gamma_a \text{ et } \mathcal{C}_b\text{, alors les tangentes aux cercles issues de } M_0 \text{ sont orthogonales}}$