« La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. »

Descartes (1596-1650), mathématicien et philosophe français.

Il est néanmoins fortement conseillé de faire une figure lorsqu'on fait de la géométrie... Le prof.

EXERCICE N°1

ABC et $A'B'C'$ sont des triangles non aplatis du plan.

On appelle $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ les parallèles respectives à (AB) , (CA) et (BC) passant respectivement par C' , B' et A' et Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 les parallèles respectives à $(A'B')$, $(C'A')$ et $(B'C')$ passant respectivement par C , B et A .

L'objectif de l'exercice est de prouver que

si $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes alors il en va de même pour Δ_1 , Δ_2 et Δ_3

On utilisera pour cela le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et on notera $A'(a_1, a_2)$, $B'(b_1, b_2)$ et $C'(c_1, c_2)$ les coordonnées des points A' , B' et C' dans ce repère qui seront des paramètres du problème.

1) Montrer que : $\det(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}) = k \times \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ où k est un réel à déterminer en fonction des paramètres.

2) a) Déterminer des équations de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans ce repère.

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection P de ces deux droites ?

b) Donner une équation de $\mathcal{D}_3$ dans ce repère.

En déduire que les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont concourantes si et seulement si $b_1 + c_2 = a_1 + a_2$ (*)

3) Donner des équations de Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 dans le repère.

4) Démontrer que, si (*) est réalisée, alors $M(x, y) \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \Leftrightarrow \begin{cases} (b_2 - c_2)x - (b_1 - c_1)y = 0 \\ (c_2 - a_2)x - (c_1 - a_1)y = c_2 - a_2 \end{cases}$

Un petit point de cours "utile" : Considérons un système d'équations à deux inconnues x et y : $(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

où a, b, c, a', b', c' sont des réels fixés. Les solutions de ce système sont les coordonnées des points d'intersection des deux droites définies par les équations données par chacune des lignes du système. Il y a donc 3 possibilités : soit les deux droites sont confondues, soit elles sont parallèles soit elles ont un seul point d'intersection. Dans les deux premiers cas, les vecteurs normaux des deux droites sont colinéaires alors qu'ils ne sont pas colinéaires dans le troisième cas.

On déduit donc : (S) a unique solution $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ (Pourquoi ?)

5) Conclure.

EXERCICE N°2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

C et D sont les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. a et b sont des réels avec $|a| > 1$

1) On appelle Γ_a le cercle de centre le point de coordonnées $A_a(a, 0)$ et de rayon $\sqrt{a^2 - 1}$

Donner une équation cartésienne de Γ_a . Représenter sur une même figure $\Gamma_{\frac{3}{2}}$, Γ_2 , Γ_3 , $\Gamma_{-\frac{3}{2}}$, Γ_{-2} et Γ_{-3}

On utilisera uniquement la règle (non graduée) et le compas. On pourra expliquer sur un dessin à part comment on obtient $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc...

Montrer que le rapport $\frac{MC}{MD}$ est constant lorsque M parcourt le cercle Γ_a

2) $\mathcal{C}_b$ est le cercle de centre le point de coordonnées $B_b(0, b)$ passant par C .

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}_b$. Justifier que $\mathcal{C}_b$ passe aussi par D

Représenter sur la figure précédente les cercles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_{-2}$

3) Prouver que les cercles Γ_a et $\mathcal{C}_b$ sont toujours sécants.

On note $M_0(x_0, y_0)$ un point d'intersection de ces cercles.

Donner les équations des tangentes aux cercles issues de M_0 et prouver que celles-ci sont toujours orthogonales.