Pour le 10/02/2012 et le 28/02/2012 | Lycée Paul Constans | Classe *PTSI*

Devoir maison n° 5

"Si vous touchez aux mathématiques, vous ne devez être ni pressés, ni cupides, fussiez-vous roi ou reine."
EUCLIDE (vers 325 av JC- vers 265 av JC) , mathématicien grec

---

EXERCICE N°1 **Pour le 10/02/2012**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère l'arc paramétré décrit par le point M_t de coordonnées $\big(x(t),y(t)\big)$ où

$$x(t)=\int_0^t \cos(2u)\sin(u)\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad y(t)=\int_0^t \sin(2u)\cos(u)\mathrm{d}u$$

On convient des notations suivantes : $f(u)=\cos(2u)\sin(u)$ et $g(u)=\sin(2u)\cos(u)$.

Attention! On s'interdit de calculer ces intégrales avant la question 7).

1) Sans calculer explicitement $x(t)$ et $y(t)$, justifier que x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et expliciter $x'(t)$ et $y'(t)$.

2) Sans aucun calcul de primitives mais en exploitant les propriétés des intégrales, établir que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad x(t+2\pi)-x(t)=0=y(t+2\pi)-y(t)$$

3) Toujours sans calculer directement $x(t)$ et $y(t)$, établir que x et y sont paires.

4) Conclure qu'une étude de l'arc sur $[0,\pi]$ est suffisante. Que dire des supports de l'arc sur $[0,\pi]$ et sur $[-\pi,0]$?

5) Dresser le tableau des variations communes de x et y sur $[0,\pi]$ sans préciser pour le moment la valeur des extrema. Préciser, sur $[0,\pi]$, les points singuliers et les points où on peut affirmer que la tangente est parallèle à un axe.

6) Donner un $DL_3(0)$ de $f(u)$ et $g(u)$. En déduire la nature du point singulier M_0 et la tangente en ce point. Est-ce cohérent avec la question 4) ?
De façon analogue, que dire des supports sur $[0,\pi]$ et $[\pi,2\pi]$? Que dire alors de la nature de l'autre point singulier ?
En comparant f et g en t et $t+\pi$, expliciter $x''(\pi)$ et $y''(\pi)$ en utilisant les DL de f et g puis préciser la tangente en M_π.

7) Calculer explicitement $x(t)$ et $y(t)$. Trouver des valeurs explicites des extrema.
Tracer le support de l'arc paramétré.

EXERCICE N°2 **Pour le 28/02/2012**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) *Préliminaires* :

a) Montrer que la fonction polynomiale p donnée par $p(t)=2t^3+t^2+t+1$ ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ en un réel α avec $\alpha<0$. Dans la suite, pour toutes évaluations numériques, on prendra $\alpha\simeq -0,74$

b) Décrire la courbe $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y^2-2x-2y=0$. (On pourra faire un changement d'origine)

2) On considère la courbe paramétrée $f(t)=(x(t);y(t))$ où $x(t)=2t^2-2t+\dfrac{1}{t^2}$ et $y(t)=2t+\dfrac{1}{t^2}$

a) Dresser le tableau commun des variations de x et y.

b) Préciser la nature du point singulier de f.

c) Étudier les différentes branches infinies de f.
On précisera l'équation et la position de la courbe par rapport à une éventuelle asymptote.

d) Représenter le support Γ de f.

3) Montrer que la courbe possède un unique point double dont on précisera les coordonnées.
On pourra utiliser $x-y$ et $x+y$.

4) Trouver des réels a,b et c pour que $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\big(y^2(t)-ax(t)-by(t)-c\big)=0$.

On dit que la courbe d'équation $y^2-ax-by-c=0$ est asymptote à Γ à l'infini