PTSI : Quelques coups de pouce pour le DM n°2

Exercice n°1 *Une équation de Ricatti*

1°/ C'est quoi une fonction affine ?

2°/ z est solution de (E_1) sur I si et seulement si z est une fonction dérivable sur I

$$\text{et : } \forall x \in I, \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) - 1 = 0$$

3°/ Il y a déjà assez d'indications dans le sujet...

4°/ Attention, en faisant le bilan des questions précédentes, vous allez trouver les expressions possibles de $y(x)$.
Votre raisonnement est par implication alors qu'il faut une équivalence pour résoudre une équation différentielle.
Il faut donc vérifier que vos expressions définissent bien des solutions de l'équation.
Les calculs de dérivées étant pénibles, vous pourrez indiquer les commandes Maple utilisées pour cette vérification.

Exercice n°2 *Résolution de l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$ où θ est un paramètre réel*

1°/ a) Pas d'indication.

1°/ b) Il y a déjà assez d'indications dans le sujet...

1°/ c) En considérant le produit des racines, que représente z_2 pour z_1 ?
En déduire la partie imaginaire de z_2 en fonction de celle de z_1 et conclure.

2°/ a) Vu la forme de $e^{2i\theta} - 1$, est-ce qu'on ne pense pas à une méthode classique du cours ?

2°/ b) A partir de l'écriture précédente, on obtient une forme exponentielle de $e^{2i\theta} - 1$ quitte à distinguer des cas.
On peut ensuite en déduire les deux racines carrées complexes.

2°/ c) On applique le cours.

Exercice n°3 *Calcul de la valeur de* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

1°/ C'est presque du cours...La méthode est archi-classique. Soyez rigoureux sur vos justifications.

2°/ Résolution sans difficulté qui s'appuie sur la définition des racines de l'unité.
Pour identifier les racines, on utilise 1) pour déterminer les arguments des solutions de l'équations.

3°/ Développer dans $P(z)$ par la formule du binôme et réaliser un changement d'indice pour retrouver les coefficients du binôme dans $Q(z)$.

4°/ On pourra s'inspirer d'une des démonstration sur la somme et le produit des racines de l'unité.
Soyez rigoureux dans le calculs. Pensez à simplifier régulièrement.

Exercice n°4 *l'équation différentielle* $y'' + 2y' + 2y = \sin(ax)e^{-x}$ (E) *où* $a \in \mathbb{R}$

Aucune difficulté pour les solutions homogènes.
Pour les solutions particulières, on exprime $\sin(ax)e^{-x}$ comme une exponentielle d'un nombre complexe e^{mz}.
On a alors deux cas à étudier selon que m soit racine ou non de l'équation caractéristique.
Il suffit d'appliquer le cours mais attention à vos calculs... Il va falloir être très rigoureux et ne rien oublier.
Pensez à bien définir toute les lettres utilisées (sont-elles des réels ? des complexes ?) et simplifier régulièrement.