# DEVOIR SURVEILLÉ $n°$ 1 DE MATHÉMATIQUES

*Durée : 3 heures - La calculatrice n'est pas autorisée.*

*Les 4 exercices sont indépendants et sont prévus pour une durée de 45 minutes. Chaque exercice sera noté sur 5 points.*

## EXERCICE N°1 — *Étude d'une fonction*

On considère l'application $f$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}}$

**1)** Donner le domaine de définition de la fonction $f$ et justifier qu'il suffit d'étudier $f$ sur $[0, \pi]$
Comment obtenir la courbe représentant $f$ sur la totalité de son domaine de définition à partir du tracé sur $[0, \pi]$ ?

**2) a)** Démontrer que $-2\cos^2 x + 5\cos x - 2$ a le même signe que $2\cos x - 1$ sur $[0, \pi]$.

**b)** Justifier soigneusement la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $[0, \pi]$ et calculer le nombre $f'(x)$ lorsque $x \in [0, \pi]$.

**3) a)** Donner le tableau des variations de $f$ sur $[0, \pi]$.

**b)** Tracer la courbe représentative de $f$ sur $[0, \pi]$ en trait plein puis sa représentation sur $[-\pi, \pi]$ en pointillés.
(unités : 6 *cm* pour $\pi$ en abscisse et 6 *cm* pour une unité en ordonnée)

## EXERCICE N°2 — *Équation et inéquations trigonométrique*

1°/ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(E)\quad 2\sin^2 x + 2\cos\sin x - 1 = 0$

2°/ a) Quel est le signe de $u(x) = 2\cos(4x) - 1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ ?
En utilisant des propriétés de $u$, en déduire le signe de $u(x)$ sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.
Établir enfin que le signe de $u(x)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est :

| $x$ | $-\pi/2$ | | $-5\pi/12$ | | $-\pi/12$ | | $\pi/12$ | | $5\pi/12$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

b) Résoudre sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'inéquation : $(I)\quad \sin(5x) - \sin(3x) > \sin(x)$

## EXERCICE N°3 — *Étude de solutions d'un problème de Cauchy à paramètre*

On considère l'équation différentielle $(1 - x)y' + xy = e^x \quad (E)$
et on note $I_1 = ]-\infty, 1[$ et $I_2 = ]1, +\infty[$ les deux intervalles de $\mathbb{R}$.

**1)** Trouver une solution simple sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

**2)** Si $I$ est l'un des intervalles $I_1$ ou $I_2$, résoudre $(E)$ sur $I$.

**3)** En déduire les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on appelle $f_k$ l'unique solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f_k(0) = k$
et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

**4)** Déterminer $f_k(x)$. Donner un *DL* à l'ordre 2 en 0 de $f_k$.
Vérifier alors que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0 sont toutes parallèles lorsque $k$ décrit $\mathbb{R}$.

## EXERCICE N°4 — *Résolutions d'équations différentielles linéaire d'ordre* 1

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1)$ : $y' + 2y = -10e^{3x} + e^{2x}\sin(x)$

2) Résoudre sur $I = ]0, +\infty[$ l'équation $(E_2)$ : $x(1 + \ln^2(x))y' + 2(\ln x)y = 1$