Devoir Surveillé n^0 2

Exercice n°1 *Un calcul d'intégrale* *Durée conseillée 30 mn, barème envisagé 2 points*

L'objectif de cette question est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin^5(x) + e^{-x}\cos^2(x)\Big)\mathrm{d}x$

1) Donner une primitive F de $[f : x \mapsto \sin^5(x)]$ sur $\mathbb{R}$
2) Donner une primitive G de $[g : x \mapsto e^{-x}\cos(2x)]$ sur $\mathbb{R}$.
3) Calculer alors I.

Exercice n°2 *Résolution d'un système différentiel* *Durée conseillée 60 mn, barème envisagé 8 points*

1) Donner les solutions réelles de $y'' - 4y' + 5y = t \quad (E_1)$

2) Donner les solutions réelles de $y'' - 4y' + 5y = -8\cos t - 4\sin t \quad (E_2)$

On considère le système différentielle $(S)\begin{cases} x' = -y + 2x + t \\ y' = 2y + x + 4\cos(t) \end{cases}$

où x et y sont des fonctions inconnues de la variable t à valeurs réelles, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

3) Si (x, y) est un couple de fonctions solution de (S), prouver que y est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et démontrer que y est solution d'une EDL_2 $(E) : y'' - 4y' + 5y = b(t)$ où $b(t)$ est à déterminer.

4) Sans résoudre l'équation (E), démontrer l'équivalence :

(x, y) est un couple de fonctions solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ est solution de } (E) \\ x \text{ est solution de } \quad x = y' - 2y - 4\cos(t) \end{cases}$

5) Résoudre (E). Déterminer alors tous les couples (x, y) de fonctions vérifiant le système differentiel (S)

Exercice n°3 *Autour du réel* $\cos\frac{\pi}{5}$ *Durée conseillée 1h30, barème envisagé 10 points*

L'objectif de ce problème est de calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$ par diverses méthodes
Les différentes parties de ce problème sont totalement indépendantes et présentent chacune une méthode.
Vous ne devez pas donc pas utiliser les résultats d'une partie dans une autre

Partie I *Un calcul exact de* $\cos\frac{\pi}{5}$ *à l'aide d'une fonction*

On considère l'application f définie sur $]0, \pi[$ par : $\forall x \in]0, \pi[, \quad f(x) = \dfrac{\sin(3x) - \sin(2x)}{\sin x}$

I-1) Calculer la valeur de $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *On pourra remarquer que* $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$.

I-2) Prouver que : $\forall x \in]0, \pi[, \quad f(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 1$. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$

Partie II *Un calcul exact de* $\cos\frac{\pi}{5}$ *à l'aide d'une exponentielle complexe*

On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on appelle $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$

II-1) Justifier que α et β sont des réels qu'on exprimera à l'aide de la fonction cos. Quel est leur signe ?
II-2) Démontrer que $\alpha\beta = \alpha + \beta = -1$. Déterminer alors une autre expression de α et β
II-3) Déduire alors la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis celle de $\cos\frac{\pi}{5}$

Partie III *Un calcul exact de* $\cos\frac{\pi}{5}$ *à l'aide d'une équation dans* $\mathbb{C}$

III-0) Pour θ réel avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, justifier que $i\dfrac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1}$ est un réel qu'on exprimera à l'aide de la fonction cotan.
III-1) On considère l'équation $(E_n) : \quad (z + i)^n = (z - i)^n$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
Démontrer que les solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}$ sont les réels $\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$
III-2) a) Démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z + i)^5 - (z - i)^5 = 2i(5z^4 - 10z^2 + 1)$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $5z^4 - 10z^2 + 1 = 0$. On ordonnera les solutions par ordre croissant.
III-3) Déterminer alors avec soin la valeur de $\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}$ puis retrouver la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$