Nom : Lycée Paul Constans PTSI

IE n°1 : Étudier une fonction réelle

1) On considère les applications de deux variables définies par : $f(x,y) = y\sqrt{1+x^2y^2}$ et $g(x,y) = x^2y + e^{xy}$
Calculer :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) =$

2) Donner les développements limités à l'ordre 3 de :

$\tan x =$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} =$

$e^x \ln(1+x) =$

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(2x) = \sin x$

4) On considère la fonction f donnée par : $f(x) = \tan(e^{-x})$. Justifier que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$

5) Prouver que la fonction $[g : x \mapsto \cos(x^2)]$ n'a pas de limite en $+\infty$

Tourner la page, s'il vous plaît.

6) On donne la fonction f définie et continue sur $]0,+\infty[$ donnée par : $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

6) a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer la limite de f en $+\infty$

6) b) Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (utiliser un $DL_1(0)$ de e^u)

6) c) Que pouvez-vous conclure de la première limite du 6)b) ?

6) d) Dans quel but a-t-on calculé la seconde limite du 6)b) ?
Que proposez-vous ensuite ? *Facultatif :* Le faire. (On pourra utiliser un $DL_2(0)$ bien choisie)