COURS (4 points) 1) Compléter : a) $\forall z \dots\dots\dots$, $\sum_{k=0}^n z^k = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{i=0}^7 i = \dots\dots\dots$ c) Si a et b sont des complexes, $(a - b)^5 = \dots\dots\dots$

2) L'ensemble $\mathbb{U}_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$

Ces solutions sont appelées n -ièmes racines de l'unité

On décrit explicitement les complexes de l'ensemble $\mathbb{U}_n$: $\mathbb{U}_n = \dots\dots\dots$

SAVOIRS-FAIRES ÉLÉMENTAIRES (11 points)

1) (1 point) Simplifier $e^{\frac{23i\pi}{4}} = \dots\dots\dots$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(e^{i\frac{\pi}{3}})^{3n} = \dots\dots\dots$

2) (1 point) Donner les racines carrées de $-35 - 12i$ (Si besoin : $35^2 + 12^2 = 37^2$)

3) (1 point) Résoudre $z^2 - (1 + 4i)z + 5 + 5i = 0$

4) (2 points) Donner les racines 4 ième de la solution à partie imaginaire strictement positive de $1 + z + z^2 = 0$

5) (1.5 points) Déterminer le complexe $\left(\frac{3 - 7i}{2 + 5i}\right)^6$ sous forme algébrique

6) (1.5 points) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \sin(2x) dx$

7) (1.5 points) Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f ou $f(x) = e^{2x} \cos(2x)$

8) (1,5 points) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit y , deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par $y(x) = (ax^3 + bx^2)e^{2ix}$. Déterminer $y'(x)$ et $y''(x)$

EXERCICE N°1 (5 points)

On définit, pour n un entier naturel non nul et θ réel, le nombre complexe $Z_n(\theta) = (1 + e^{i\theta})^n$.

1) Expliciter la partie imaginaire de $Z_n(\theta)$

2) Développer $Z_n(\theta)$ avec la formule du binôme.

3) Exprimer alors le réel $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ sans le symbole somme