Lycée Paul Constans

Année 2011/2012

Classe de PTSI

Concours Blanc de Mathématiques $n°$ 1

Ce sujet comporte deux exercices et un problème indépendants.
Durée : 4 heures - La calculatrice n'est pas autorisée
La clarté et la précision de la rédaction est prise en compte...

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs...

Jacques Prévert

Exercice 1 *(environ sur 5 points)*

$$\text{On définit les intégrales de Wallis par : } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$$

$$\text{On définit également la famille d'intégrales : } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

0) Pour n fixé dans $\mathbb{N}$,

montrer que $\left[f_n : t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right]$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, \sqrt{n}]$. Préciser $f_n(\sqrt{n})$.

Cela justifie donc l'existence de l'intégrale J_n. Par ailleurs, l'existence de I_n qui ne pose aucune difficulté est admise.

1) En posant $\quad t = \sqrt{n}\cos(u) \quad$ démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \sqrt{n} I_{2n+1}$

2) En utilisant la relation $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ puis une intégration par parties, prouver que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

3) Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2,\ I_3,\ J_0,\ J_1$ et J_2.

4) a) Justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.

b) En déduire que $\quad I_{n+1} \sim_{+\infty} I_n$.

5) On considère la suite (u_n) de terme général $\quad u_n = (n+1)I_{n+1}I_n \quad$ pour tout entier naturel n.

Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$. $\quad$ En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

6) Déduire des questions précédentes que $\quad I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

7) Déterminer enfin la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Exercice 2 *(environ sur 5 points)*

Dans cet exercice, φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles

$$\text{On considère aussi l'équation différentielle : } \quad (\mathcal{E}) \quad (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x)$$

$$\text{Enfin, on note } G \text{ l'application de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par : } \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \int_0^x e^t \varphi(t) dt$$

$$\text{et on définit enfin la fonction } F \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ par : } \quad \forall x > 0, \quad F(x) = \frac{G(x)}{e^x - 1}$$

I) *Étude d'un cas particulier*

Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

1) Démontrer alors que, pour $x > 0$, $F(x) = \dfrac{2}{e^{\frac{x}{2}} + 1}$

2) Donner le développement limité à l'ordre 2 de F au voisinage de 0

3) Vérifier que F est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$

II) *Retour au cas général*

1) Justifier la définition de G sur $\mathbb{R}_+$ et prouver que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et expliciter $G'(x)$ à l'aide de φ.

2) Déterminer un développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2

Ce développement fera apparaître les réels $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$...

3) En déduire qu'un développement au voisinage de 0 de F à l'ordre 1 est : $\quad F(x) = \varphi(0) + \dfrac{\varphi'(0)}{2}x + o(x)$

4) Prouver alors que F est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement est dérivable en 0.
Préciser $F(0)$ et $F'(0)$

5) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ *On pourra remarquer que :* $\dfrac{1}{1 - e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

6) Justifier que F est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$

7) Prouver que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie quand x tend vers 0

Problème

Les parties de ce problème sont indépendantes sous réserve d'admettre la caractérisation de cocyclicité de la partie I.

Partie I : *Caractérisation de la cocyclicité* *(environ sur 3 points)*

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon non nul et A et B deux points distincts de ce cercle.
On travaille dans le repère orthonormé de centre O tel que le point A a pour affixe 1.

I-1) Faire une figure. Justifier que l'affixe de B est $e^{i\beta}$ où β est réel avec $\beta \not\equiv 0[2\pi]$.

I-2) On considère un autre point M du cercle $\mathcal{C}$ distincts de A et B et on note $e^{i\theta}$ son affixe.
Écrire le complexe $\dfrac{e^{i\beta}-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ sous une forme $Re^{i\frac{\beta}{2}}$ où R est un réel qu'on exprimera à l'aide des réels β et θ.

I-3) Prouver alors que : $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$ Quel théorème usuel a-t-on redémontré ?

L'objectif des questions suivantes est de démontrer le résultat :

Quatres points A, B, C ***et*** D ***disctincts sont cocycliques ou alignés si et seulement si*** $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\ [\pi]$

(On rappelle que quatre points sont cocycliques s'ils sont situés sur un même cercle)

I-4) *Implication directe* : Prouver l'égalité angulaire si
a) A, B, C et D sont alignés. b) A, B, C et D sont cocycliques.

I-5) *Réciproque* : **I-5-a)** Soit $\mathcal{T}$ une droite issue de A ne passant pas par B,
montrer qu'il existe un unique cercle qui passe par A et B et qui soit tangent à $\mathcal{T}$.
Si $\overrightarrow{u}$ dirige $\mathcal{T}$, établir également que $2(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$

I-5-b) On suppose $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\ [\pi] = 0\ [\pi]$. Que conclure pour A, B, C, D ?

I-5-c) On suppose $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\ [\pi] \neq 0\ [\pi]$. On appelle $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles circonscrits à ABC et ABD.
Prouver que ces cercles ont la même tangente en A. Conclure.

Partie II : Transformation de Joukovsky *(environ sur 4 points)*

Soit la transformation du plan qui au point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe $f(z)$ où : $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

II-1) Résoudre les équations : $(E_1):\ f(z) = 1$ et $(E_2):\ f(z) = -1$.

II-2) Donner les racines carrées de $2i - 1$. En déduire les solutions de $(E_3):\ f(z) = 1 + i$.

II-3) Soit a un complexe différent de 1 et -1 et (E) l'équation $(E):\ f(z) = a$.

II-3-a) Montrer que (E) est une équation du second degré qui a deux solutions distinctes inverses l'une de l'autre.

II-3- b) Si a est un réel avec $a \in]-1, 1[$, prouver que les deux racines sont alors de module 1 et qu'elles sont conjuguées.

II-4) L'application $[f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}]$ est-elle injective ? surjective ?

II-5) Soit z un nombre complexe non nul, on note
O le point d'affixe 0, I le point d'affixe 1, J celui d'affixe -1, M celui d'affixe z, N celui d'affixe $\frac{1}{z}$ et P celui d'affixe $\bar{z}$.

II-5-a) Établir que : i) O, P et N sont alignés puis que ii) I, J, M et N sont alignés ou cocycliques.

II-5-b) En déduire une construction géométrique de N d'affixe $\dfrac{1}{z}$ puis de M' d'affixe $f(z)$ à partir de M.
Faire une figure avec pour point M le point $M_1(1+i)$ puis le point $M_2(-2)$

II-6) Expliciter les ensembles $\mathcal{E}_1 = \{M(z) \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{E}_2 = \{M(z) \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$. Chercher z sous forme algébrique.

La transformation de Joukovsky, du nom du savant aérodynamicien russe Nikolaï Joukovski, est, historiquement, la transformation $\left[z \mapsto z + \dfrac{1}{z}\right]$.

Elle était utilisée dans le calcul des profils d'aile d'avion. Si $M(z)$ *décrit un cercle, le point* $P(f(z))$ *associé décrit le profil d'une aile d'avion.*

<u>Partie III</u> : *Faisceaux de droites* *(environ sur 3 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On définit les familles de droites $(\mathcal{D}_m)_{m\in\mathbb{R}}$ et $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{R}}$ données par leurs équations cartésiennes :

$$\mathcal{D}_m : \ (m+1)x - 2my + 5m - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_m : \ (m-1)x + (3m+1)y - 2m + 1 = 0$$

III-1) Justifier que, pour toutes les valeurs réelles du paramètre m, ces équations définissent bien des droites.

III-2) Expliciter la nature et donner les éléments caractéristique de la courbe $\Gamma : \ x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
Expliciter alors les droites $\mathcal{D}_m$ qui sont des tangentes à Γ.

III-3) Justifier que :

- toutes les droites $\mathcal{D}_m$ sont concourantes en un même point qu'on note A dont on précisera les coordonnées.
- toutes les droites Δ_m sont concourantes en un même point qu'on note B dont on précisera les coordonnées.

III-4) En admettant le résultat de Cramer permettant la résolution du système (S) : $\left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\textit{Si} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \textit{ alors le système a une unique solution } (x, y) \textit{ où } x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \textit{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Prouver que, pour m réel fixé, $\mathcal{D}_m$ et Δ_m sont sécantes en un point K_m dont on déterminera les coordonnées.

III-5) Pour $m \in \mathbb{R}$ fixé, donner un vecteur normal $\vec{u}_m$ à $\mathcal{D}_m$ et un vecteur normal $\vec{v}_m$ à Δ_m.
En déduire que l'angle entre les droites $\mathcal{D}_m$ et Δ_m vaut $\dfrac{3\pi}{4}$ modulo π

En utilisant la caractérisation de cocyclicité, on démontre que les lignes de niveaux associées à la fonction scalaire $\left[\varphi : M \mapsto (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [\pi]\right]$ *où A et B sont des points fixés du plan sont soit des cercles passant par A et B mais privé de A et B soit la droite (AB) privée de A et B .*
Ici, on a : $\forall m \in \mathbb{R}, \quad (\overrightarrow{K_mA}, \overrightarrow{K_mB}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]$ *de sorte que le point K_m décrit un cercle passant par A et B lorsque m décrit $\mathbb{R}$.*

Fin du sujet