Correction du DS n°1 des élèves de PTSI

Exercice n°1 *Étude d'une fonction* On considère l'application f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

1) Donner le domaine de définition de la fonction f et justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$
Comment obtenir la courbe représentant f sur la totalité de son domaine de définition à partir du tracé sur $[0,\pi]$?

• On sait que, pour tout x réel : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 5-4\cos x \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{5-4\cos x} \leq 3$
en composant par $\sqrt{\ }$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Dès lors, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est correctement définie sur } \mathbb{R}}$: c'est le quotient de la fonction $[x \mapsto \sin x]$ par la fonction $[x \mapsto \sqrt{5-4\cos x}]$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est clairement 2π périodique : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+2\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{\sqrt{5-4\cos(x+2\pi)}} = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} = f(x)$

et elle est impaire : $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{5-4\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{5-4\cos(x)} = -f(x)$

$\boxed{\text{Il suffit donc d'étudier la fonction } f \text{ sur } [0,\pi]}$: à partir du tracée représentant f sur $[0,\pi]$, on obtient la courbe représentant f sur $[-\pi,\pi]$ en réalisant une symétrie de centre O puis, à partir du tracé sur $[-\pi,\pi]$, on obtient la totalité de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteurs $2\pi k\overrightarrow{\imath}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) a) Démontrer que $-2\cos^2 x + 5\cos x - 2$ a le même signe que $2\cos x - 1$ sur $[0,\pi]$.

On remarque que : $-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = P(\cos x)$ où $P(X) = -2X^2 + 5X - 2$.

Le discriminant de P est $\Delta = 25 - 4\times(-2)\times(-2) = 9$, il a donc deux racines $X_1 = \dfrac{-5-3}{-4} = 2$ et $X_2 = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{1}{2}$

aussi $P(X)$ se factorise en $P(X) = -2X^2+5X-2 = -2(X-2)(X-1/2) = (2-X)(2X-1)$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\quad -2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = P(\cos x) = (2-\cos x)(2\cos x - 1)$

Mais : $\forall x \in \mathbb{R},\quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 2 - \cos x > 0$ donc le signe de $-2\cos^2 x + 5\cos x - 2$ est celui de $2\cos x - 1$

Ainsi : $\boxed{\text{l'expression } -2\cos^2 x + 5\cos x - 20 \text{ sur } [0,\pi] \text{ (ou sur } \mathbb{R}\text{) a le même signe que l'expression } 2\cos x - 1 > 0}$

b) Justifier soigneusement la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,\pi]$ et calculer le nombre $f'(x)$ lorsque $x \in [0,\pi]$.

D'après les théorèmes usuels, la fonction $[x \mapsto 5-4\cos x]$ est clairement continue et dérivable sur $[0,\pi]$.
Elle est à valeurs dans $[1,9]$ d'après les calculs de la question 1).
Or, la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ donc elle est continue et dérivable sur $[1,9]$.
Aussi, par composition, $[x \mapsto \sqrt{5-4\cos x}]$ est continue et dérivable sur $[0,\pi]$ où elle est à valeurs dans $[1,3]$.
La fonction sinus est continue et dérivable sur $[0,\pi]$ et la fonction $[x \mapsto \sqrt{5-4\cos x}]$ continue et dérivable sur $[0,\pi]$ et elle ne s'annule pas sur $[0,\pi]$ donc le quotient f de ces fonctions est une fonction continue et dérivable sur $[0,\pi]$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue et dérivable sur } [0,\pi]}$$

De plus, pour tout x dans $[0,\pi]$, on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x \times \sqrt{5-4\cos x} - (\sqrt{5-4\cos x})' \times \sin x}{5-4\cos x} = \frac{\cos x \times \sqrt{5-4\cos x} - \frac{4\sin x}{2\sqrt{5-4\sin x}} \times \sin x}{5-4\cos x}$$
$$= \frac{\cos x \times (5-4\cos x) - 2\sin^2 x}{(5-4\cos x)\sqrt{5-4\cos x}}$$

Finalement, $$\boxed{\forall x \in [0,\pi],\quad f'(x) = \frac{-2\cos^2 x + 5\cos x - 2}{(5-4\cos x)\sqrt{5-4\cos x}}}$$

3) a) Donner le tableau des variations de f sur $[0,\pi]$.

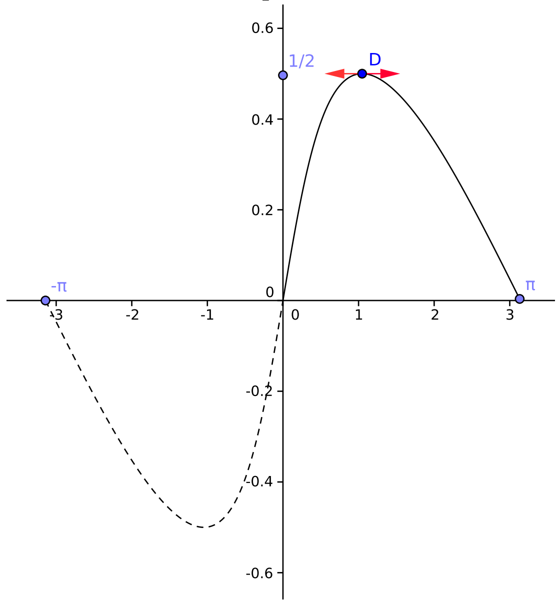
On sait que, pour tout x réel :
$$5-4\cos x > 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{5-4\cos x} > 0$$
donc le signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$ est celui de $-2\cos^2 x + 5\cos x - 2$
autrement dit celui de $2\cos x - 1$ d'après la question I-2-a.
Sur $[0,\pi]$:
• $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$
• $2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}[$

Enfin, clairement : $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f(\pi/3) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5-2}} = \dfrac{1}{2}$

On peut donc construire le tableau :

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

b) Tracer la courbe représentative de f sur $[0, \pi]$ en trait plein puis sa représentation sur $[-\pi, \pi]$ en pointillés.
(unités : 6 cm pour π en abscisse et 6 cm pour une unité en ordonnée)



EXERCICE N°2 *Équation et inéquations trigonométrique*

1°/ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) \quad 2\sin^2 x + 2\cos\sin x - 1 = 0$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$ et $2\sin x \cos x = \sin(2x)$ aussi : $(E_2) \Leftrightarrow -\cos(2x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ $\Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{2} - 2x\ [2\pi]$ ou $2x \equiv -\frac{\pi}{2} + 2x\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow 4x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\underbrace{0 \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}_{\text{impossible}} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$

Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$

2°/ a) Quel est le signe de $u(x) = 2\cos(4x) - 1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$?
En utilisant des propriétés de u, en déduire le signe de $u(x)$ sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.
Établir enfin que le signe de $u(x)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est :

x	$-\pi/2$		$-5\pi/12$		$-\pi/12$		$\pi/12$		$5\pi/12$		$\pi/2$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ alors $4x \in [0, \pi]$ et donc :
- $2\cos(4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}$ Attention ! $4x \in [0, \pi]$...
- $2\cos(4x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(4x) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant 4x \leqslant \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12}$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	0		$\pi/12$		$\pi/4$
$u(x)$		$+$	0	$-$	

Mais, la fonction u est paire puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$, centré en 0, et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(-x) = u(x)$
Par ailleurs, u est $\frac{\pi}{2}$ périodique puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos(4x + 2\pi) - 1 = 2\cos(x) - 1 = u(x)$.
A partir du signe de $u(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ on déduit le signe de $u(x)$ sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par parité :

x	$-\pi/4$		$-\pi/12$		$\pi/12$		$\pi/4$
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

puis par périodicité on obtient celui sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$:

x	$-\pi/4$		$-\pi/12$		$\pi/12$		$5\pi/12$		$7\pi/12$		$3\pi/4$
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

puisque $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$

et donc, par parité à nouveau, on a :

x	$-\pi/2$		$-5\pi/12$		$-\pi/12$		$\pi/12$		$5\pi/12$		$\pi/2$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\frac{\pi}{2} \in]\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[$

b) Résoudre sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'inéquation : $(I) \quad \sin(5x) - \sin(3x) > \sin(x)$

En utilisant les relations de trigonométrie, on sait que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(5x) - \sin(3x) = \sin\left(\frac{5x+3x}{2} + \frac{5x-3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{5x+3x}{2} - \frac{5x-3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)$
soit : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(5x) - \sin(3x) = 2\sin(x)\cos(4x)$ et : $(I) \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(4x) > \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) \times (2\cos(4x) - 1) > 0$
On utilise alors un tableau de signe pour résoudre sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

x	$-\pi/2$		$-5\pi/12$		$-\pi/12$		0		$\pi/12$		$5\pi/12$		$\pi/2$
$\sin(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin(x) \times u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de (I) est donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}[\cup]0, \frac{\pi}{12}[\cup]\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]}$

$\boxed{\text{EXERCICE N°3}}$ On considère l'équation différentielle $\quad (1-x)y'+xy=e^x \quad (E)$
et on note $I_1=]-\infty,1[$ et $I_2=]1,+\infty[$ les deux intervalles de $\mathbb{R}$

1) Trouver une solution simple sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad (1-x)\exp'(x)+x\exp(x)=(1-x)e^x+xe^x=e^x$
aussi $\boxed{\text{la fonction exponentielle est une solution évidente de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}}$

2) Si I est l'un des intervalles I_1 ou I_2, résoudre (E) sur I

On connaît déjà une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur I.
Il nous suffit donc de déterminer les solutions homogènes autrement dit les solutions sur I de : $(1-x)y'+y=0\ (H)$
Or, sur I, $1-x\neq 0$ donc : $\quad (H)\Leftrightarrow y'+\dfrac{x}{1-x}y=0 \quad$ or la fonction $\left[a : x\mapsto \dfrac{1}{1-x}\right]$ est continue sur I
Elle admet donc des primitives et : $\quad \forall x\in I,\ a(x)=\dfrac{x-1+1}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}=-1-\dfrac{1}{x-1}=\Big(-x-\ln|x-1|\Big)'$
de sorte que les solutions de (H) sont les fonctions h_C, où C est une constante réelle, donnée par l'expression :
$\forall x\in I,\quad h_C(x)=C\exp(x+\ln|x-1|)=C\times e^x\times|x-1|\quad$ Or, $x-1$ garde un signe constant sur I donc
l'ensemble des solutions homogènes sur I est $\quad \mathcal{S}_{(H)}=\left\{\left[\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda(x-1)e^x\end{array}\right] \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right\}$

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions sur } I \text{ de } (E) \text{ est } \mathcal{S}_I=\left\{\left[\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & e^x+\lambda(x-1)e^x\end{array}\right] \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$$

3) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}$, on réalise un recollement de solutions en 1.
Analyse On cherche des conditions nécessaires sur f pour que f soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors :
- c'est une solution sur I_1 et I_2 donc il existe des constantes réelles λ_1 et λ_2 telles que :

$$\forall x\in I_1,\quad f(x)=e^x+\lambda_1(x-1)e^x \quad \text{et} \quad \forall x\in I_2,\quad f(x)=e^x+\lambda_2(x-1)e^x$$

- f doit être continue en 1 c'est à dire que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)\in\mathbb{R}$ existent dans $\mathbb{R}$ et sont égales :

Si $\lambda\in\mathbb{R}$: $\quad \underbrace{e^x}_{\xrightarrow[x\to 1]{} e}+\underbrace{\lambda(x-1)e^x}_{\xrightarrow[x\to 1]{} 0}\xrightarrow[x\to 1]{} e \quad$ donc $\quad \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \quad$ pour (λ_1,λ_2) quelconques dans $\mathbb{R}^2$

- f doit être dérivable en 1 c'est à dire que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existent dans $\mathbb{R}$ et sont égales :

Mais : $\quad \forall x>1,\quad \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{e^x+\lambda_1(x-1)e^x-e}{x-1}=\underbrace{\dfrac{e^x-e}{x-1}}_{\xrightarrow[x\to 1]{}\exp'(1)=e}+\underbrace{\lambda_1 e^x}_{\xrightarrow[x\to 1]{}\lambda_1 e+e}\xrightarrow[x\to 1^+]{}\lambda_1 e$

De même $\quad \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\xrightarrow[x\to 1^-]{}\lambda_2 e+e \quad$ aussi la dérivabilité en 1 impose : $\quad e+\lambda_1 e=e+\lambda_2 e \ \Leftrightarrow\ \lambda_1=\lambda_2$
On a donc justifié que, si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E), alors : $\exists\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=e^x+\lambda(x-1)e^x$
Synthèse Si on note $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E), l'analyse a prouvé que :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}\subset\left\{\left[\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & e^x+\lambda(x-1)e^x\end{array}\right] \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Puisque les fonctions du type $[x\mapsto e^x+\lambda(x-1)e^x]$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ sont bien continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et qu'elles vérifient l'équation (E) (en 1) : $0\times f'(1)+1\times f(1)=e=e^1$, l'autre inclusion est vraie et donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation } (E) \text{ est } \quad \mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{\left[\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & e^x+\lambda(x-1)e^x\end{array}\right] \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$$

Dans la suite, on appelle f_k l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\quad f_k(0)=k$
et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

4) Déterminer $f_k(x)$. Donner un DL à l'ordre 2 en 0 de f_k.
Vérifier alors que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0 sont toutes parallèles lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

Déterminons la fonction f_k. On sait que : $\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\quad f_k(x)=e^x+\lambda(x-1)e^x$
de sorte que : $\quad f_k(0)=1+\lambda\times -1=1-\lambda \quad$ et, par suite : $\quad f_k(0)=k\ \Leftrightarrow\ 1-\lambda=k\ \Leftrightarrow\ \lambda=1-k$
Finalement, on a donc : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f_k(x)=e^x+(1-k)(x-1)e^x$. $\quad$ Cherchons alors un DL_2 en 0 de f_k :

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)+(1-k)(x-1)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0\\
&= 1-(1-k)+(1+(1-k)-(1-k))\,x+\left(\frac{1}{2}+(1-k)-\frac{1-k}{2}\right)x^2\\
&\qquad +x^2\times\underbrace{\left(\varepsilon(x)+(1-k)\frac{x}{2}+(1-k)x\varepsilon(x)-(1-k)\varepsilon(x)\right)}_{=\varepsilon_1(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0}
\end{aligned}$$

Finalement, le DL_2 en 0 de f_k est $\boxed{f_k(x) = k + x + \left(1 - \frac{k}{2}\right)x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$

Pour démontrer que des droites sont toutes parallèles, il suffit de justifier qu'elles ont toutes la même pente.
Or, la pente des tangentes au point d'abscisse 0 des courbes $\mathcal{C}_k$ est le réel $f_k'(0)$. Déterminons ce réel $f_k'(0)$.
Comme f_k admet un $DL_2(0)$, elle admet aussi un $DL_1(0)$ aussi elle est dérivable en 0 et le nombre $f_k'(0)$ est le coefficient en x du DL donc : $\forall k \in \mathbb{R},\ f_k'(0) = 1$
Comme $f_k'(0)$ ne dépend pas de k, toutes les tangentes au point d'abscisse 0 des courbes $\mathcal{C}_k$ sont parallèles lorsque $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE N°4

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $y' + 2y = -10e^{3x} + e^{2x}\sin(x)$

L'équation est résolue sur $\mathbb{R}$.
• Équation homogène : Il est clair que l'ensemble des solutions homogènes est

$$\mathcal{S}_{H_1} = \left\{[x \mapsto Ce^{-2x}] \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$

• Solution particulière : On utilise le principe de superposition des solutions.
1°/ On cherche une solution particulière y_1 de $y' + 2y = -10e^{3x}$ sous la forme $y_1(x) = \alpha e^{3x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
y_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2y = -e^x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 3\alpha e^{3x} + 2\alpha e^{3x} = -10e^{3x} \Leftrightarrow 5\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = -2$
ainsi y_1 donnée par : $y_1(x) = -2e^{3x}$ convient.
2°/ On cherche une solution particulière y_2 de $y' + 2y = e^{2x}\sin(x)$
On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{2x}\sin(x) = \Im m\left(e^{2x}e^{ix}\right) = \Im m\left(e^{(2+i)x}\right)$
Aussi, on recherche y_2 sous la forme $y_2 = \Im m(z)$ avec z solution particulière de $y' + 2y = e^{(2+i)x}$.
On recherche alors z sous la forme $z(x) = \alpha e^{(2+i)x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$
z est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2y = e^{(2+i)x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (2+i)\alpha e^{(2+i)x} + 2\alpha e^{(2+i)x} = e^{(2+i)x} \Leftrightarrow (4+i)\alpha = 1$
Aussi : $\alpha = \frac{1}{4+i} = \frac{4-i}{17}$ et donc $y_2(x) = \Im m\left(\frac{4-i}{17}e^{(2+i)x}\right) = e^{2x}\Im m\left(\frac{4-i}{17}e^{ix}\right) = \frac{4}{17}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{17}e^{2x}\cos(x)$
Finalement, par superposition des solutions, $y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E_1) et l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\left[x \mapsto Ce^{-2x} - 2e^{3x} + \frac{4}{17}e^{2x}\sin(x) - \frac{1}{17}e^{2x}\cos(x)\right] \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

2) Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation (E_2) : $x(1 + \ln^2(x))y' + 2(\ln x)y = 1$

L'équation est résolue sur I car $x \neq 0$ et $1 + \ln^2(x) > 0$ sur I.
• Équation homogène : On résout l'équation : (H_2) : $y' + \frac{2(\ln x)}{x(1+(\ln x)^2)}y = 0$
Il s'agit donc de trouver une primitive sur I à la fonction a donnée par : $a(x) = \frac{2(\ln x)}{x(1+(\ln x)^2)}$.
Si on introduit u sur I donnée par $u(x) = 1 + (\ln x)^2$ alors, par les théorèmes usuels, u est dérivable sur I et :
$u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$ de sorte que : $\forall x \in I,\quad a(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \Big(\ln|u(x)|\Big)' = \Big(\ln(1 + \ln^2(x)\Big)'$ puisque $u(x) > 0$ sur I
Finalement, l'ensemble des solutions de (H) sur I est

$$\mathcal{S}_{H_2} = \left\{\left[x \mapsto C\exp\big(-\ln(1+\ln^2(x))\big)\right] \mid C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left[x \mapsto \frac{C}{1+\ln^2(x)}\right] \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$

• Solution particulière : On applique la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $[y_0 : x \mapsto C(x)h(x)]$ où C est une fonction dérivable sur I et $\left[h : x \mapsto \frac{1}{1+\ln^2(x)}\right]$ est une solution homogène de (E).

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, C'(x)h(x) + \underbrace{C(x)h'(x) + \frac{2(\ln x)}{x(1+(\ln x)^2)}C(x)h(x)}_{=0 \text{ car } h \text{ solution homogène de } (E)} = \frac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, C'(x)h(x) = \frac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, C'(x) = \tfrac{1}{x} = \Big(\ln x\Big)' \text{ en utilisant l'expression de } h\ (h(x) \neq 0) \end{aligned}$$

Finalement, une solution particulière de (E_2) est $[y_0 : x \mapsto \frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}]$ et l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\left[x \mapsto \frac{\ln x + C}{1+\ln^2(x)}\right] \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$