PTSI : Correction du DS n° 2 des élèves de $PTSI$

EXERCICE N°1 *Un calcul d'intégrale* *Durée conseillée 30 mn, barème envisagé 2 points*

L'objectif de cette question est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin^5(x) + e^{-x}\cos^2(x)\Big)\mathrm{d}x$

1) Donner une primitive F de $[f : x \mapsto \sin^5(x)]$ sur $\mathbb{R}$

On a, pour tout x réel :
$f(x) = \sin^5(x) = \sin(x) \times \sin^4(x) = \sin(x) \times \big(\sin^2(x)\big)^2 = \sin(x) \times \big(1 - \cos^2(x)\big)^2 = \sin(x) \times (1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x))$

On retrouve alors des primitives usuelles $u'(x) \times u^k(x) = \Big(\dfrac{u^{k+1}(x)}{k+1}\Big)'$ où $u(x) = \cos(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$ et $k \in \{2, 4\}$

Aussi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \Big(-\cos(x) + 2\dfrac{\cos^3(x)}{3} - \dfrac{\cos^5(x)}{5}\Big)'$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\cos(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x)}$ convient.

2) Donner une primitive G de $[g : x \mapsto e^{-x}\cos(2x)]$ sur $\mathbb{R}$.

On a, pour tout x réel : $g(x) = e^{-x}\cos(2x) = \Re e\Big(e^{-x}e^{2ix}\Big) = \Re e\Big(e^{(-1+2i)x}\Big) = \left[\Re e\Big(\dfrac{e^{(-1+2i)x}}{-1+2i}\Big)\right]'$

Or : $\Re e\Big(\dfrac{e^{(-1+2i)x}}{-1+2i}\Big) = \Re e\Big(\underbrace{e^{-x}}_{\in\mathbb{R}} \times \dfrac{e^{2ix}}{-1+2i}\Big) = e^{-x}\Re e\Big(\dfrac{-1-2i}{5}e^{2ix}\Big) = e^{-x} \times \Big(-\dfrac{1}{5}\cos(2x) + \dfrac{2}{5}\sin(2x)\Big)$

De sorte que finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = -\frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x) + \frac{2}{5}e^{-x}\sin(2x)}$ convient.

3) Calculer alors I.

On introduit la fonction h donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \sin^5(x) + e^{-x}\cos^2(x)$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$ aussi $h(x) = f(x) + \dfrac{1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{2}g(x)$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donc donnée par H où : $\forall x \in \mathbb{R},\quad H(x) = F(x) - \dfrac{1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{2}G(x)$

et donc : $I = \Big[F(x) - \dfrac{1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{2}G(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = F(\frac{\pi}{2}) - \dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}G(\frac{\pi}{2}) - F(0) + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}G(0)$

Or : $F(\frac{\pi}{2}) = 0,\quad G(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{2}},\quad F(0) = -1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = -\frac{8}{15}$ et $G(0) = -\frac{1}{5}$

donc : $I = \frac{1}{2} \times -\frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{16+15+3}{30} = -\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{17}{15}$ On a donc justifié que : $\boxed{I = -\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{17}{15}}$

EXERCICE N°2 *Résolution d'un système différentiel* *Durée conseillée 60 mn, barème envisagé 8 points*

1) Donner les solutions réelles de $y'' - 4y' + 5y = t \quad (E_1)$

• On résout l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0 \quad (H)$ associée à cette équation
L'équation caractéristique associée à (H) est $r^2 - 4r + 5 = 0\ (*)$ de discriminant $\Delta = 16 - 4 \times 5 = -4 = (2i)^2$
Il y a donc deux racines complexes conjuguées de $(*)$: $r = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$ et $\bar{r} = 2 - i$ et, par suite, on sait que

$$\text{l'ensemble des solutions réelles homogènes est}\quad \mathcal{S}_H = \left\{\Big[t \mapsto e^{2t}\Big(A\cos(t) + B\sin(t)\Big)\Big] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

• On cherche désormais une solution particulière y_1 de (E_1). Le second membre est de la forme $P(t)e^{mt}$ avec $P(t) = t$ et $m = 0$ qui n'est pas racine de $(*)$ donc on cherche y_1 sous la forme $\big[y_1 : t \mapsto (at + b)\big]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
y_1 est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall t \in \mathbb{R},\quad y_1(t) = at + b,\ y_1'(t) = a,\ y_1''(t) = 0$

$$y_1 \text{ est solution de } (E_1) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ 0 - 4 \times a + 5 \times (at + b) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 1 \\ 5b - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{4}{5}a = \frac{4}{25} \end{cases}$$

$$\text{Une solution particulière de } (E_1) \text{ est donc } \left[y_1 : t \mapsto \frac{5t + 4}{25}\right]$$

$$\boxed{\text{Aussi, l'ensemble des solutions réelles de } (E_1) \text{ est donc } \mathcal{S}_1 = \left\{\Big[t \mapsto \frac{5t+4}{25} + e^{2t}\Big(A\cos(t) + B\sin(t)\Big)\Big] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

2) Donner les solutions réelles de $y'' - 4y' + 5y = -8\cos t - 4\sin t \quad (E_2)$

• On connaît déjà l'ensemble des solutions réelles homogènes car l'équation homogène est la même.
• On cherche une solution particulière de (E_2). On remarque que : $-8\cos t - 4\sin t = -8\mathrm{Re}\big(e^{it}\big) - 4\mathrm{Im}\big(e^{it}\big)$
On cherche donc d'abord une solution particulière z de $y'' - 5y' + 4y = e^{it}\ (\tilde{E}_2)$ Le second membre est en $P(t)e^{mt}$ avec $P(t) = 1$ et $m = i$ qui n'est pas racine de $(*)$ aussi on cherche z sous la forme : $\big[z : t \mapsto \lambda e^{it}\big]$ où $\lambda \in \mathbb{C}$
z est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall t \in \mathbb{R},\quad z(t) = \lambda e^{it},\ z'(t) = i\lambda e^{it},\ z''(t) = -\lambda e^{it}$

$$z \text{ est solution de } (\tilde{E}_2) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ -\lambda e^{it} - 4i\lambda e^{it} + 5\lambda e^{it} = e^{it} \Leftrightarrow (4 - 4i)\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4} \times \frac{1+i}{2} = \frac{1+i}{8}$$

Une solution particulière complexe de $(\tilde{E}_2)$ est donc z donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \dfrac{1+i}{8}e^{it} = \dfrac{1+i}{8}\big(\cos t + i \sin t\big)$

aussi $\operatorname{Re}\big(z(t)\big) = \dfrac{1}{8}\cos t - \dfrac{1}{8}\sin t$ et $\operatorname{Im}\big(z(t)\big) = \dfrac{1}{8}\sin t + \dfrac{1}{8}\cos t$

de sorte que, par superposition des solutions, une solution particulière y_2 de (E_2) est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_2(t) = -8 \times \left(\frac{1}{8}\cos t - \frac{1}{8}\sin t\right) - 4 \times \left(\frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t\right) = -\frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions réelles de } (E_2) \text{ est } \mathcal{S}_2 = \left\{ \left[t \mapsto -\frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + e^{2t}\Big(A\cos(t) + B\sin(t)\Big)\right] \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

<u>Remarque</u> : On peut aussi rechercher une solution "analogue" en $\big[y_0 : x \mapsto \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)\big]$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ à identifier.

On considère le système différentiel $(S)\begin{cases} x' = -y + 2x + t \\ y' = 2y + x + 4\cos(t) \end{cases}$

où x et y sont des fonctions inconnues de la variable t à valeurs réelles, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

3) Si (x,y) est un couple de fonctions solution de (S), prouver que y est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation différentielle (E) linéaire du second ordre à coefficient constant vérifiée par y.

Si (x,y) est un couple solution de (S) alors x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\big[y' : t \mapsto 2y(t) + x(t) + 4\cos t\big]$

donc, par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, y' est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{y \text{ est bien deux fois dérivables sur } \mathbb{R}}$

De plus, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = 2y(t) + x(t) + \cos t$

donc $y''(t) = 2y'(t) + x'(t) - 4\sin(t) = 2y'(t) + \Big(-y(t) + 2x(t) + t\Big) - 4\sin t$ car $x'(t) = -y(t) + 2x(t) + t$

aussi : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) = 2y'(t) - y(t) + 2\Big(y'(t) - 2y(t) - 4\cos t\Big) + t - 4\sin t$ puisque $y'(t) = 2y(t) + x(t) + 4\cos t$

aussi : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) = 4y'(t) - 5y(t) + t - 8\cos t - 4\sin t$

$$\boxed{y \text{ est donc une solution réelle de } \quad y'' - 4y' + 5y = t - 8\cos t - 4\sin t \quad (E)}$$

4) Sans résoudre (E), démontrer : (x,y) est solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ est solution de } (E) \\ x \text{ est solution de } \quad x = y' - 2y - 4\cos(t) \end{cases}$

• L'implication directe est évidente. Si (x,y) est solution de (S) alors y est solution de (E) ce qu'on a prouvé en 3) et x vérifie l'équation $x = y' - 2y - 4\cos(t)$ puisque c'est la deuxième équation de (S)

• Réciproquement,si y est solution de $y'' - 4y' + 5y = t - 8\cos t - 4\sin t$ (E) et si x vérifie $x = y' - 2y - 4\cos(t)$, justifions que (x,y) est une solution de (S). Déjà, l'équation $y' = x + 2y + 4\cos t$ est clairement vérifiée et :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \Big(y'(t) - 2y(t) - 4\cos(t)\Big)' &= y''(t) - 2y'(t) + 4\sin(t) \\
&= \underbrace{\Big(4y'(t) - 5y(t) + t - 8\cos(t) - 4\sin(t)\Big)}_{\text{car } y \text{ solution de } (E)} - 2y'(t) + 4\sin(t) \\
&= 2y'(t) - 5y(t) + t - 8\cos(t) \\
&= 2\Big(x(t) + 2y(t) + 4\cos t\Big) - 5y(t) + t - 8\cos(t) = 2x(t) - y(t) + t
\end{aligned}$$

donc l'équation $x' = 2x - y + t$ est aussi vérifiée.

On a donc prouvé : $\boxed{(x,y) \text{ est un couple de fonctions solution de } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} y \text{ est solution de } (E) \\ x \text{ est solution de } \quad x = y' - 2y - 4\cos(t) \end{cases}}$

5) Déterminer alors tous les couples (x,y) de fonctions vérifiant le système différentiel (S)

On connaît l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) : l'ensemble des solutions homogènes est le même que pour (E_1) et (E_2) et, par superposition des solutions, une solution particulière de (E) est y_0 donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = y_1(t) + y_2(t)$

avec y_1 et y_2 définies en 1) et 2). Donc : $\mathcal{S} = \left\{ \left[t \mapsto \dfrac{5t+4}{25} - \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\sin t + e^{2t}\Big(A\cos(t) + B\sin(t)\Big)\right] \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Aussi : (x,y) solution de (S) si et seulement si il existe des réels A et B tels que, pour tout t réel,

$$y(t) = \frac{5t+4}{25} - \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + e^{2t}\Big(A\cos(t) + B\sin(t)\Big)$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad x(t) = y'(t) - 2y(t) - 4\cos t &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{2}\sin t + \tfrac{1}{2}\cos t + e^{2t}\Big((2A+B)\cos(t) + (2B-A)\sin(t)\Big) \\
&\quad -2 \times \left(\tfrac{5t+4}{25} - \tfrac{3}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}\sin t + e^{2t}\Big(A\cos(t) + B\sin(t)\Big)\right) - 4\cos t \\
&= \tfrac{-10t-3}{25} - \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{2}\sin t + e^{2t}\Big(B\cos(t) - A\sin(t)\Big)
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(x,y) \text{ est solution} \Leftrightarrow \quad \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \frac{-10t-3}{25} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + e^{2t}\Big(B\cos(t) - A\sin(t)\Big) \\ \\ y(t) = \frac{5t+4}{25} - \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + e^{2t}\Big(A\cos(t) + B\sin(t)\Big) \end{cases}}$

Exercice n°3 L'objectif de ce problème est de calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ par diverses méthodes

Partie I *Un calcul exact de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ à l'aide d'une fonction*

On considère l'application f définie sur $]0,\pi[$ par : $\forall x\in]0,\pi[,\quad f(x)=\dfrac{\sin(3x)-\sin(2x)}{\sin x}$

I-1) Calculer la valeur de $f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. *On pourra remarquer que* $\dfrac{3\pi}{5}=\pi-\dfrac{2\pi}{5}$.

On a : $f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)-\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=0$ car $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ pour $\theta\in\mathbb{R}$ Aussi $\boxed{f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=0}$

I-2) Prouver que : $\forall x\in]0,\pi[,\quad f(x)=4\cos^2 x-2\cos x-1$ En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{5}$

On considère l'application f définie sur $]0,\pi[$ par : $\forall x\in]0,\pi[,\quad f(x)=\dfrac{\sin(3x)-\sin(2x)}{\sin x}$

Elle est correctement définie puisque $\sin(x)\neq 0$ sur $]0,\pi[$. De plus, en utilisant les formules de trigonométrie, on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in]0,\pi[,\quad f(x)=\frac{\sin(2x+x)-\sin(2x)}{\sin x} &= \frac{\sin(2x)\cos x+\sin x\cos(2x)-\sin(2x)}{\sin x}\\ &= \frac{2\sin x\cos^2 x+\sin x(2\cos^2 x-1)-2\sin x\cos x}{\sin x}=2\cos^2 x+(2\cos^2 x-1)-2\cos x\end{aligned}$$

Et donc : $\boxed{\forall x\in]0,\pi[,\quad f(x)=4\cos^2 x-2\cos x-1}$

Mais, d'autre part, $f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=4\cos^2\dfrac{\pi}{5}-2\cos\dfrac{\pi}{5}-1$ donc on obtient $4\cos^2\dfrac{\pi}{5}-2\cos\dfrac{\pi}{5}-1=0$

Ainsi, $\cos\frac{\pi}{5}$ est une racine du polynôme $4X^2-2X-1$ de discriminant $\Delta=4+16=20=(2\sqrt{5})^2$ et de racines les réels $\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Or $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ car $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}>0$ mais $\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ donc $\boxed{\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

Partie II *Un calcul exact de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ à l'aide d'une exponentielle complexe*

On note $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on appelle $\alpha=\omega+\omega^4$ et $\beta=\omega^2+\omega^3$

II-1) Justifier que α et β sont des réels qu'on exprimera à l'aide de la fonction cos. Quel est leur signe ?

On note $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et on appelle $\alpha=\omega+\omega^4$ et $\beta=\omega^2+\omega^3$

On a : $\alpha=\omega+\omega^4=e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{8i\pi}{5}}=e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{i\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{\frac{2i\pi}{5}}+\underbrace{e^{2i\pi}}_{=1}e^{-\frac{2i\pi}{5}}$ soit $\boxed{\alpha=2\cos\dfrac{2\pi}{5}}$ par les formules d'Euler

De même : $\beta=\omega^2+\omega^3=e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{6i\pi}{5}}=e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{i\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)}=e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{-\frac{4i\pi}{5}}$ soit $\boxed{\beta=2\cos\dfrac{4\pi}{5}}$

Comme $0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{4\pi}{5}<\pi$, on a : $\boxed{\alpha>0 \text{ et } \beta<0}$

II-2) Démontrer que $\alpha\beta=\alpha+\beta=-1$. Déterminer alors une autre expression de α et β

On sait que ω est une racine cinquième de l'unité donc $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$ et $\omega^5=1$ aussi

$1+\alpha+\beta=0$ et $\alpha\beta=(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3)=\omega^3+\omega^4+\underbrace{\omega^6}_{=\omega\times\omega^5}+\underbrace{\omega^7}_{=\omega^2\times\omega^5}=\omega^3+\omega^4+\omega+\omega^2=\alpha+\beta$

de sorte que, finalement, on a bien $\boxed{\alpha\beta=\alpha+\beta=-1}$

On connaît la somme $\alpha+\beta=-1$ et le produit $\alpha\beta=-1$ aussi α et β sont les racines de $X^2-(-1)X+(-1)$

mais X^2+X-1 a pour discriminant $\Delta=1+4=5$ et donc ses racines sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Comme $\alpha>0$ et $\beta<0$, et puisque $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0$, on a : $\boxed{\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ et $\boxed{\beta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}}$

II-3) Déduire alors la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ puis celle de $\cos\dfrac{\pi}{5}$

On a donc démontré que $\alpha=2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ aussi $\boxed{\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

et : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=2\cos\frac{4\pi}{5}=-2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-2\cos\frac{\pi}{5}$ donc $\boxed{\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

Ou bien : $\cos\dfrac{2\pi}{5}=2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1\Leftrightarrow\cos^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\right)=\left(\dfrac{\overbrace{6+2\sqrt{5}}^{5+1+2\sqrt{5}}}{4^2}\right)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

de sorte que, puisque $\cos\frac{\pi}{5}>0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}>0$, on a : $\boxed{\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

Partie III — *Un calcul exact de* $\cos\dfrac{\pi}{5}$ *à l'aide d'une équation dans* $\mathbb{C}$

III-0) Pour θ réel avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, justifier que $\quad i\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\quad$ est un réel qu'on exprimera à l'aide de la fonction cotan

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ alors $e^{i\theta}-1 \neq 0$ et on peut définir le complexe $i\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$

On a alors : $\quad i\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = i\times\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\times\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} = i\times\dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} = \operatorname{cotan}\dfrac{\theta}{2}\quad$ soit $\quad\boxed{i\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad i\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \operatorname{cotan}\dfrac{\theta}{2}}$

III-1) On considère l'équation $\quad (E_n):\quad (z+i)^n = (z-i)^n\quad$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$ où $n\in\mathbb{N}^*$ est fixé.

Démontrer que les solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}$ sont les réels $\quad\operatorname{cotan}\dfrac{k\pi}{n}\quad$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$

i n'est pas une solution de (E_n) car $(i-i)^n = 0$ et $|(i+i)^n| = |2i|^n = 2^n \neq 0$. Aussi :

$(E_n) \Leftrightarrow (z+i)^n = (z-i)^n$ et $z\neq i \Leftrightarrow \dfrac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n = 1\quad$ On reconnaît l'équation des racines n^{ieme} de l'unité

aussi : $\quad (E_n) \Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!],\quad \dfrac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!],\quad z+i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i)$

la réciproque de cette dernière équivalence est vraie car : $\begin{cases} z=i \\ z+i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i)\end{cases} \Rightarrow 2i = 0\quad$ aussi, par l'absurde, on a bien $\quad z\neq i$

alors : $\quad (E_n) \Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!],\quad z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!],\quad z = -i\dfrac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$

le cas $k=0$ donne l'absurditée $0=-2i$ et : $k\in[\![1,n-1]\!] \Rightarrow 1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\neq 0$

Finalement : $\quad (E_n) \Leftrightarrow \exists k\in[\![1,n-1]\!],\quad z = i\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1} = \operatorname{cotan}\dfrac{k\pi}{n}\quad$ d'après III-0 avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}\in]0,2\pi[$ si $k\in[\![1,n-1]\!]$

On a donc bien démontré que $\boxed{\text{les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de } (E_n) \text{ sont les réels}\quad \operatorname{cotan}\dfrac{k\pi}{n}\quad \text{pour } k\in[\![1,n-1]\!]}$

III-2) a) Démontrer que : $\quad \forall z\in\mathbb{C},\quad (z+i)^5-(z-i)^5 = 2i(5z^4-10z^2+1)$

En utilisant la formule du binôme à l'ordre 5 et les égalités $\quad i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$ et $i^5=i,\quad$ on a :

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\quad (z+i)^5-(z-i)^5 &= z^5+5iz^4-10z^3-10iz^2+5z+i-\left(z^5-(5iz)+(-10iz^3)-(-10z^2)+(5z)-(i)\right) \\ &= 10iz^4-20iz^2+2i\quad \text{et donc : } \boxed{\forall z\in\mathbb{C},\quad (z+i)^5-(z-i)^5 = 2i(5z^4-10z^2+1)}\end{aligned}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad 5z^4-10z^2+1=0.\quad$ On ordonnera les solutions par ordre croissant.

On a : $\quad 5z^4-10z^2+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5X^2-10X+1=0 \quad$ et $\quad X=z^2$

Le discriminant de $\quad 5X^2-10X+1\quad$ est $\quad \Delta = 100-20 = 80 = (4\sqrt{5})^2\quad$ de sorte que ses racines sont les deux réels

$\dfrac{10-4\sqrt{5}}{10} = 1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\quad$ et $\quad 1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\quad$ qui sont toutes les deux positives $(1-\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{4})}{5} > 0)$ aussi :

$5z^4-10z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2 = 1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $z^2 = 1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow z = \sqrt{1+2\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$ ou $z = -\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ ou $z = \sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ ou $z = -\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

Ordonnons les solutions. On a : $\quad 1-\frac{2\sqrt{5}}{5} < 1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\quad$ aussi $\quad\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ (stricte croissance de $[x\mapsto\sqrt{x}]$)

de sorte que : $\quad -\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}\quad$ et donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble ordonné des solutions de}\quad 5z^4-10z^2+1=0\quad\text{est}\quad \mathcal{S} = \left\{-\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}\right\}}$$

III-3) Déterminer alors avec soin la valeur de $\operatorname{cotan}\dfrac{\pi}{5}$ puis retrouver la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{5}$

Mais alors :

$z\in\mathcal{S} \Leftrightarrow 5z^4-10z^2+1=0 \Leftrightarrow 2i(5z^4-10z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z+i)^5-(z-i)^5=0 \Leftrightarrow z$ est solution de (E_5)

Les solutions de (E_5), trouvées en III-1, sont les solutions de $\mathcal{S}$, trouvées en III-2 . Pour identifier les solutions, il nous suffit d'ordonner les solutions de (E_5) c'est à dire d'ordonner $\quad\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{cotan}\frac{3\pi}{5}$ et $\operatorname{cotan}\frac{4\pi}{5}$

Or, cotan décroît sur $]0,\pi[$ et $\quad 0<\frac{\pi}{5}<\frac{2\pi}{5}<\frac{3\pi}{5}<\frac{4\pi}{5}<\pi\quad$ donc : $\operatorname{cotan}\frac{4\pi}{5} < \operatorname{cotan}\frac{3\pi}{5} < \operatorname{cotan}\frac{2\pi}{5} < \operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}$

On peut donc, en définitive, affirmer que $\quad\boxed{\operatorname{cotan}\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}}\quad$ Mais : $\quad 1+\operatorname{cotan}^2\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{5}} = \dfrac{1}{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}\quad$ aussi :

$$\cos^2\frac{\pi}{5} = 1-\frac{1}{1+\operatorname{cotan}^2\frac{\pi}{5}} = 1-\frac{1}{1+1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = 1-\frac{5}{10+2\sqrt{5}} = 1-\frac{5(10-2\sqrt{5})}{100-20} = \frac{30+10\sqrt{5}}{80} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4^2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

et donc, puisque $\cos\frac{\pi}{5}>0$, on a justifié que : $\quad\boxed{\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$