Nom : Lycée Paul Constans PTSI

## IE n°1 : Étudier une fonction réelle

**1)** On considère les applications de deux variables définies par : $f(x,y)=y\sqrt{1+x^2y^2}$ et $g(x,y)=x^2y+e^{xy}$ Calculer :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\times\frac{2xy^2}{2\sqrt{1+x^2y^2}}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+ye^{xy}\right)=2x+e^{xy}+xye^{xy}$$

**2)** Donner les $DL_3(0)$ de :

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=x-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac12\times-\frac32}{2}x^2+\frac{-\frac12\times-\frac32\times-\frac52}{3!}x^3+x^3\varepsilon(x)$$
où $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$
$$=x-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+x^3\varepsilon(x)$$

$$e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)\left(x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_1(x)\right)=x+\left(1-\tfrac12\right)x^2+\left(\tfrac13-\tfrac12+\tfrac12\right)x^3+x^3\varepsilon_2(x)$$

aussi $e^x\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)$ où $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to0]{}0,\varepsilon_1(x)\xrightarrow[x\to0]{}0,\varepsilon_2(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$

**3)** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(2x)=\sin x$

$\cos(2x)=\sin x\Leftrightarrow\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow 2x\equiv\frac{\pi}{2}-x\ [2\pi]$ ou $2x\equiv x-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{6}[\frac{2\pi}{3}]$ ou $x\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation est $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

**4)** On considère la fonction $f$ donnée par : $f(x)=\tan(e^{-x})$. Justifier que $f$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$

$[x\mapsto e^{-x}]$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[0,+\infty[$ où elle est à valeurs dans $]0,1]$. Or : $]0,1]\subset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
et la fonction tan est définie et continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ aussi, par composition, $f$ est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$

**5)** Prouver que la fonction $[g:x\mapsto\cos(x^2)]$ n'a pas de limite en $+\infty$

On pose $u_n=\sqrt{2n\pi}$ et $v_n=\sqrt{\pi+2n\pi}$ pour tout entier naturel $n$.Alors : $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$
Clairement : $g(u_n)=\cos(2n\pi)=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et $g(v_n)=\cos(\pi+2n\pi)=-1\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1$
On peut donc conclure que $g$ n'a pas de limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$

**6)** On donne la fonction $f$ définie et continue sur $]0,+\infty[$ donnée par : $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

**6) a)** Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et déterminer la limite de $f$ en $+\infty$

En $0^+$ : $\frac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}-1\to+\infty$ aussi, par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0.$
On peut prolonger $f$ par continuité avec $f(0)=0$
En $+\infty$ : $\frac{1}{x}\to0^+\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}-1\to0^+$ aussi, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$

**6) b)** Prouver que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ (utiliser un $DL_1(0)$ de $e^u$)

En $0^+$ : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}=\dfrac{1}{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-x}$ or $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$

En $+\infty$ : on a $e^u=1+u+u\varepsilon(u)$ où $\varepsilon(u)\xrightarrow[u\to0]{}0$ or $u=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc $e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$

Dés lors : $x(e^{\frac{1}{x}}-1)=1+\varepsilon(\frac{1}{x})$ et $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{1+\underbrace{\varepsilon(\frac{1}{x})}_{\to0}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

**6) c)** Que pouvez-vous conclure de la première limite du 6)b) ?

On a donc : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to0^+]{}0$ autrement dit $f$ est dérivable (à droite) en 0
et la courbe représentative de $f$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

**6) d)** Dans quel but a-t-on calculer la seconde limite du 6)b) ? Il s'agit d'étudier la branche infinie en $+\infty$
Que proposez-vous ensuite ? *Facultatif* : Le faire. (On pourra utiliser un $DL_2(0)$ bien choisie)

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ donc il s'agit d'étudier la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$