Nom : Lycée Paul Constans PTSI

IE n°2 : Nombres complexes

Cours *(4 points)* 1) Compléter : a) $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} i = \frac{7\times 8}{2} = 28$ c) Si a et b sont des complexes, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

2)L'ensemble $\mathbb{U}_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$.

Ces solutions sont appelées les racines nieme de l'unité

On décrit explicitement les complexes de l'ensemble $\mathbb{U}_n$: $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$

Savoirs-faires élémentaires *(11 points)*

1) *(1 point)* Simplifier $e^{\frac{23i\pi}{4}} = e^{\frac{(24-1)i\pi}{4}} = e^{6i\pi - i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(e^{i\frac{\pi}{3}})^{3n} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$

2) *(1 point)* Donner les racines carrées de $-35-12i$ (Si besoin : $35^2 + 12^2 = 37^2$)

Le plus rapide : $-35 - 12i = 1 - 36 - 2\times 6i = 1^2 + (6i)^2 - 2\times 1 \times (6i) = (1-6i)^2$

donc $\boxed{\text{les racines de } -35-12i \text{ sont } 1-6i \text{ et } -1+6i}$

Méthode classique : on cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec

$(x+iy)^2 = -35-12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -35 & (1) \\ 2xy = -12 & (2) \end{cases}$ et aussi $x^2+y^2 = |x+iy|^2 = |-35-12i| = \sqrt{(35)^2+(12)^2} = 37$ (3)

(1) + (3) donne $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (3) − (1) donne $2y^2 = 72 \Leftrightarrow y = \pm 6$ et (2) indique que x et y de signes opposés

3)*(1 point)* Résoudre $z^2 - (1+4i)z + 5 + 5i = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = (1+4i)^2 - 4(5+5i) = 1 + 8i - 16 - 20 - 20i = -35 - 12i$ or $\Delta = (1-6i)^2$ d'après 2)

aussi les solutions de l'équation sont $z_1 = \dfrac{1+4i-(1-6i)}{2} = 5i$ et $z_2 = \dfrac{1+4i+(1-6i)}{2} = 1-i$

4) *(2 points)* Donner les racines 4 ieme de la solution à partie imaginaire strictement positive de $1+z+z^2 = 0$

L'ensemble des solutions de $1+z+z^2=0$ est $\mathbb{U}_3 - \{1\} = \{j, j^2\}$.

La solution dont la partie imaginaire est strictement positive est $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ solution de $z^4 = j$ or :

$z^4 = j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{12}}\right)^4 = \left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}} \in \mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}; \Leftrightarrow z \in \{e^{i\frac{\pi}{6}}, -e^{i\frac{\pi}{6}}, ie^{i\frac{\pi}{6}}, -ie^{i\frac{\pi}{6}}\}$

Les racines 4 ieme de j sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

5) *(1.5 points)* Déterminer le complexe $\left(\dfrac{3-7i}{2+5i}\right)^6$ sous forme algébrique

$$\left(\frac{3-7i}{2+5i}\right)^6 = \left(\frac{(3-7i)(2-5i)}{2^2+5^2}\right)^6 = \left(\frac{-29-29i}{29}\right)^6 = (1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = 2^3 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i$$

6) *(1.5 points)* Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin(2x)\mathrm{d}x$

Le plus rapide : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \underbrace{\sin(2x)}_{2\sin(x)\cos(x)} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\sin(x)\mathrm{d}x = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)u^4(x)\mathrm{d}x$ où $u(x) = \cos x$

donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin(2x)\mathrm{d}x = -2\left[\frac{\cos^5(x)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$

Ou en beaucoup plus long et avec plus de risque d'erreurs de calculs...en linéarisant :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^3(x)\sin(2x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \left(\dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right) = \dfrac{1}{16i}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$

soit : $\cos^3(x)\sin(2x) = \frac{1}{16i}\left(e^{5ix} + 3e^{3ix} + 3e^{ix} + e^{-ix} - e^{ix} - 3e^{-ix} - 3e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)$

$= \frac{1}{16i}\left(2i\sin(5x) + 3\times 2i\sin(3x) + 2\times 2i\sin(x)\right) = \dfrac{1}{8}\sin(5x) + \dfrac{3}{8}\sin(3x) + \dfrac{1}{4}\sin x$

Aussi : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin(2x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}\sin(5x) + \frac{3}{8}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin x\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(5x)}{40} - \frac{\cos(3x)}{8} - \frac{\cos x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{1}{40} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$

7) *(1.5 points)* Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f ou $f(x) = e^{2x}\cos(2x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x}\cos(2x) = \Re e\left(e^{2x}e^{2ix}\right) = \Re e\left(e^{(2+2i)x}\right) = \Re e\left(\frac{e^{(2+2i)x}}{2+2i}\right)' = \left(\Re e\left(\frac{e^{(2+2i)x}}{2+2i}\right)\right)'$$

or : $\Re e\left(\dfrac{e^{(2+2i)x}}{2+2i}\right) = \dfrac{e^{2x}}{2}\Re e\left(\dfrac{1-i}{2}e^{2ix}\right) = \dfrac{e^{2x}}{4}\big(\cos(2x) + \sin(2x)\big)$

Finalement, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F avec : $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{4}\big(\cos(2x) + \sin(2x)\big)$

8) *(1 point)* Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit y, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par $y(x) = (ax^3 + bx^2)e^{2ix}$. Déterminer $y'(x)$ et $y''(x)$

On a : $y'(x) = (2iax^3 + (3a+2ib)x^2 + 2bx)e^{2ix}$ et $y''(x) = (-4ax^3 + (6ia + 6ia - 4b)x^2 + (6a + 4ib + 4ib)x + 2b)e^{2ix}$
$= (-4ax^3 + 4(3ia - b)x^2 + 2(3a + 4ib)x + 2b)e^{2ix}$

Exercice n°1 *(5 points)*

On définit, pour n un entier naturel non nul et θ réel, le nombre complexe $Z_n(\theta) = \left(1 + e^{i\theta}\right)^n$.

1) Expliciter la partie imaginaire de $Z_n(\theta)$

$Z_n(\theta) = \left(1 + e^{i\theta}\right)^n = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{\frac{-i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}})\right)^n = e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{n\theta}{2}}$ d'où $\Im m\big(Z_n(\theta)\big) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)$

2) Développer $Z_n(\theta)$ avec la formule du binôme.

$$Z_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}$$

3) Exprimer alors le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$ sans le symbole somme

Il suffit d'égaler les deux expressions de la partie imaginaire de $Z_n(\theta)$.

Dans 2), on obtient : $\Im m\big(Z_n(\theta)\big) = \Im m\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$

donc on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$