

2) Compléter les égalités suivantes :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{car } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctan\left(\tan \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{car } \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{aligned} \sin\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right) &= 2 \sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times \left| \cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) \right| \quad \text{car } \underbrace{\cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)}_{\in [0, \frac{\pi}{2}]} > 0 \\ &= \frac{2}{3} \times \sqrt{\cos^2\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \times \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

3) L'objectif de la question est de calculer $I = \int_0^a \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$
où $a = \ln(1 + \sqrt{2})$

a) Vérifier que $a = \operatorname{argsh} 1$

$$a = \operatorname{argsh} 1 \Leftrightarrow \operatorname{sh} a = 1 \quad \text{or}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{e^a - \frac{1}{e^a}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1}{2(1 + \sqrt{2})} = 1 \end{aligned}$$

b) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x}$

Déjà, pour tout x réel, $\operatorname{ch} x \neq 0$ et $1 + \operatorname{sh}^2 x \neq 0$
donc les deux membres de l'égalité ont du sens.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\operatorname{ch} x} &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} \quad \text{car } \operatorname{ch} x \neq 0 \\ &= \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} \quad \text{car } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{aligned}$$

Remarque, on peut mener le raisonnement en partant du 2nd membre.

c) Calculer alors I :

On fait le bilan des questions précédentes :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int_0^a \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a \frac{(\operatorname{sh} x)'}{1 + (\operatorname{sh} x)^2} dx \\ &= \left[\arctan(\operatorname{sh} x) \right]_0^a \\ &= \arctan(\operatorname{sh} a) - \arctan(\operatorname{sh} 0) \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

1) Compléter le tableau suivant :

La fonction f donnée par	est continue sur	à valeurs dans	est dérivable sur	avec $f'(x) =$	et on a
$f(x) = \arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$] -1, 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in [-1, 1],$ $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$
$f(x) = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$f(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$
$f(x) = \operatorname{argch}(x)$	$[1, +\infty[$	$[0, +\infty[$	$]1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f(1) = 0$
$f(x) = \operatorname{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$] -1, 1[$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$f(0) = 0$
$f(x) = a^x$ où $a \in]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$(\ln a)a^x$	$f(0) = 1$

4) L'objectif de la question est de simplifier l'expression : $f(x) = \arctan e^x - \arctan \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right)$

a) Établir que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{ch} t)^2 + (\operatorname{sh} t)^2 = \operatorname{ch}(2t)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{ch} t)^2 + (\operatorname{sh} t)^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} + e^{2t} - 2t + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \operatorname{ch}(2t)$$

b) Étudier la définition et la dérivabilité de f .

La fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $[u : x \mapsto \operatorname{th} \frac{x}{2}]$ est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $\exp$ et u sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles or $\arctan$ est également définie sur $\mathbb{R}$.
Aussi, par composition puis par somme, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

c) Calculer et simplifier au maximum $f'(x)$ lorsque c'est possible.

Pour tout x réel, on a : $u'(x) = \operatorname{th}'\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}$

et : $f'(x) = e^x \times \arctan'(e^x) - u'(x) \times \arctan'(u(x))$

$$= \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \times \frac{1}{1 + \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\operatorname{ch} x} \quad \text{en utilisant a)}$$

$$= \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0}$$

d) Que peut-on en déduire ?

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$ autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) = \arctan(e^0) - \arctan(\operatorname{th} 0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan e^x - \arctan \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) = \frac{\pi}{4}}$