Correction du DS n° 3 des élèves de PTSI : Sujet A *durée 2 heures*

EXERCICE N°1 *Résolution d'une équation différentielle du second ordre* *Durée 25 minutes*

1) Établir, lorsque c'est possible (à préciser), que $e^{\operatorname{argsh} x} = \sqrt{1+x^2}+x$

On sait : $\forall X \in \mathbb{R},\ e^X = \operatorname{ch} X + \operatorname{sh} X \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\operatorname{argsh} x} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x)} + \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+x^2}+x$

2) Résoudre alors sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : (x^2+1)y'' + xy' - 4y = 0$ en posant $x = \operatorname{sh} t$.

La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Si y est une solution de (E),
y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, aussi $[z : t \mapsto y(\operatorname{sh} t)]$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition
et $\forall t \in \mathbb{R}$ on a : $z'(t) = (\operatorname{ch} t)y'(\operatorname{sh} t)$ et $z''(t) = (\operatorname{sh} t)y'(\operatorname{sh} t) + (\operatorname{ch}^2 t)y''(\operatorname{sh} t)$.

Ainsi :
$$\begin{aligned} y \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (\operatorname{sh}^2 t + 1)y''(\operatorname{sh} t) + (\operatorname{sh} t)y'(\operatorname{sh} t) - 4y(\operatorname{sh} t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - 4z(t) = 0 \quad (E') \quad \text{car } \operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t \end{aligned}$$

L'équation caractéristique de (E') est $r^2 - 4 = (r+2)(r-2) = 0$
donc l'ensemble de ses solutions est $\left\{[t \mapsto Ae^{2t} + Be^{-2t}] \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Aussi :
$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(\operatorname{sh} t) = z(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} \\ &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{2\operatorname{argsh} x} + Be^{-2\operatorname{argsh} x} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est alors
$$\mathcal{S} = \left\{[x \mapsto Ae^{2\operatorname{argsh} x} + Be^{-2\operatorname{argsh} x}] \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\left[x \mapsto A(x+\sqrt{1+x^2})^2 + B(x+\sqrt{1+x^2})^{-2}\right] \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

EXERCICE N°2 *Durée 20 minutes* Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\quad \arcsin(2x) + \arccos(2x-1) = \pi$

• *Domaine d'existence :* Les fonctions arcsin et arccos sont définies sur $[-1;1]$.

Or : $-1 \le 2x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ et $-1 \le 2x-1 \le 1 \quad \Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2 \quad \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

L'équation (E) n'a donc de sens que si x appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

• *Condition nécessaire :*
$$\begin{aligned} (E) \quad \Rightarrow \quad \cos(\arccos(2x-1)) &= \cos(\pi - \arcsin(2x)) = -\cos(\arcsin(2x)) \\ \Rightarrow \quad 2x-1 &= -\sqrt{\cos^2(\arcsin(2x)} \quad \text{puisque } \cos(\arcsin(2x)) \ge 0 \text{ car } \arcsin(2x) \in \left[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right] \\ &= -\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(2x))} = -\sqrt{1-(2x)^2} \end{aligned}$$

Aussi : $(E) \quad \Rightarrow \quad (2x-1)^2 = 1 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(2x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

• *Condition suffisante :* 0 et $\frac{1}{2}$ sont tous les deux dans l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Si $x = 0$ alors $2x = 0$ et $2x - 1 = -1$ donc $\arcsin(2x) + \arccos(2x-1) = 0 + \pi = \pi$

Si $x = \frac{1}{2}$ alors $2x = 1$ et $2x-1 = 0$ aussi $\arcsin(2x) + \arccos(2x-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}}$

EXERCICE N°3 *Détermination d'un réel* *Durée 20 minutes*

1) Si $a = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$ donner la valeur exacte de $\cos a$ et de $\sin(a)$ puis celle de $\sin(3a)$

On sait que $\boxed{\cos a = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ et que $\sin a \geqslant 0$ puisque $a \in [0,\pi]$ aussi $\sin a = |\sin a| = \sqrt{\sin^2 a} = \sqrt{1-\cos^2 a}$

soit $\sin a = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-(6+2+2\sqrt{12})}{16}} = \sqrt{\frac{6+2-2\sqrt{12}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ car $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \geqslant 0$

Par ailleurs : $\sin(3a) = \sin(2a+a) = \sin(2a)\cos(a) + \sin(a)\cos(2a) = 2\sin(a)\cos^2(a) + \sin(a) \times (2\cos^2(a) - 1)$

d'où : $\sin(3a) = 2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \left(2\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16} - 1\right) = \frac{(6-2)(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{32} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(6+2+2\sqrt{6}\sqrt{12}-8)}{32}$

soit : $\sin(3a) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ainsi $\boxed{\sin a = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(3a) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

2) En déduire la valeur exacte de a. *On donne* $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \simeq 0.97$

On a alors : $\sin(3a) = \sin\frac{\pi}{4}$ Justifions que $3a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ afin de conclure par bijectivité de sinus sur cet intervalle.

$1 > \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \simeq 0.97 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\sqrt{3} \simeq 1.7$ autrement dit, en utilisant la décroissance de arccos, on a : $0 < a < \frac{\pi}{6}$

Mais : $a \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow 3a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Finalement : $\begin{cases} \sin(3a) = \sin\frac{\pi}{4} \\ (3a, \frac{\pi}{4}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2 \end{cases} \Rightarrow 3a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{\pi}{12}}$

$\boxed{\text{EXERCICE N°4}}$ *Un changement de variable* *Durée 15 minutes*

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. En posant $x = \dfrac{1}{t}$, calculer la valeur de I.

Tout d'abord, $\left[f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x^2}\right]$ est bien continue sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset]0, +\infty[$ donc le réel I est bien défini.

On pose $x = \dfrac{1}{t}$ alors $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 2 \\ x = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$ et : $I = \displaystyle\int_2^{\frac{1}{2}} \frac{\ln \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^2}} \times -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ $\left(= \displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \right)$

Ici $\left[\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}\right]$ est de classe C^1 sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ où $\left[f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x^2}\right]$ est continue.

Aussi : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -I$ en utilisant que $\ln \dfrac{1}{t} = -\ln t$ et donc : $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow \boxed{I = 0}$

$\boxed{\text{EXERCICE N°5}}$ *Étude d'une fonction* *Durée 40 minutes*

Soit $f(x) = \arccos(\operatorname{th} x) + \arctan(\operatorname{sh} x)$, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f. f est-elle impaire ? (Justifier)

Établir (sans utiliser de dérivation) que : $\forall x \in D_f, \quad f(x) + f(-x) = \pi$ Que peut-on conclure pour $\mathcal{C}$?

• La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1; 1[\subset [-1, 1]$ où la fonction arccos est définie donc, par composition, $\arccos(\operatorname{th} x)$ est défini pour $x \in \mathbb{R}$.

• La fonction sh est définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ où la fonction arctan est définie donc, par composition, $\arctan(\operatorname{sh} x)$ est défini pour $x \in \mathbb{R}$

En définitive, $f(x)$ est défini pour $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$

On rappelle que : si f définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire alors $f(0) = f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) =$

Ici : $f(0) = \arccos(0) + \arctan 0 = \frac{\pi}{2} \neq 0$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas impaire}}$

Enfin : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \arccos(\operatorname{th} x) + \arctan(\operatorname{sh} x) + \arccos(\operatorname{th}(-x)) + \arctan(\operatorname{sh}(-x)) \\ &= \arccos(\operatorname{th} x) + \arctan(\operatorname{sh} x) + \arccos(-\operatorname{th} x) - \arctan(\operatorname{sh} x) \quad \text{par imparité de th, sh et arctan} \\ &= \arccos(\operatorname{th} x) + \arccos(-\operatorname{th} x) = \pi \quad \text{puisque } \forall t \in [-1, 1],\ \arccos(t) + \arccos(-t) = \pi \end{aligned}$$

Pour x réel quelconque, les deux points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$ de $\mathcal{C}$ ont toujours pour milieu le point fixe $\left(\dfrac{x-x}{2}, \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right) = (0, \frac{\pi}{2})$ autrement dit $\boxed{\mathcal{C} \text{ possède le point } \Omega(0, \tfrac{\pi}{2}) \text{ pour centre de symétrie.}}$

2) Justifier la dérivabilité de f sur D_f et déterminer le nombre dérivée $f'(x)$. Que peut-on conclure ?

• La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1; 1[$ où la fonction arccos est dérivable donc, par composition, $[x \mapsto \arccos(\operatorname{th} x)]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\arccos(\operatorname{th} x))' = -\frac{\operatorname{th}'(x)}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = -\frac{1}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}} \quad \text{car } \operatorname{ch} x > 0$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{ch} x} \quad \text{car } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

• La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ où arctan est dérivable donc, par composition, $[x \mapsto \arctan(\operatorname{sh} x)]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\arctan(t\operatorname{sh} x))' = \dfrac{\operatorname{sh}' x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

• Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0}$

• La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = \arccos 0 + \arctan 0 = \dfrac{\pi}{2} + 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{\pi}{2}}$

3) On se propose de démontrer l'égalité : $\arccos \dfrac{5}{13} + \arctan \dfrac{5}{12} = \dfrac{\pi}{2}$ $(*)$ On pose $\theta = \operatorname{argth} \dfrac{5}{13}$.

Montrer que $\theta = \ln 3 - \ln 2$ et calculer $\operatorname{sh}(\theta)$. En déduire l'égalité $(*)$.

$\theta = \operatorname{argth} \dfrac{5}{13} \Leftrightarrow \operatorname{th} \theta = \dfrac{5}{13} \Leftrightarrow \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} = \dfrac{5}{13} \Leftrightarrow e^{2\theta} = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \boxed{\theta = \ln 3 - \ln 2}$

Alors $\operatorname{sh} \theta = \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{5}{12}$ soit $\boxed{\operatorname{sh}(\theta) = \dfrac{5}{12}}$ de sorte que $\arctan(\operatorname{sh} \theta) = \arctan \dfrac{5}{12}$.

Mais , par définition de θ, $\operatorname{th} \theta = \dfrac{5}{13}$, donc $\arccos(\operatorname{th} \theta) = \arccos \dfrac{5}{13}$

Ainsi : $f(\theta) = \arccos(\operatorname{th}\theta) + \arctan(\operatorname{sh} \theta) = \arccos \dfrac{5}{13} + \arctan \dfrac{5}{12}$ mais, d'autre part, $f(\theta) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après la 3).

Finalement, $\boxed{\arccos \dfrac{5}{13} + \arctan \dfrac{5}{12} = \dfrac{\pi}{2}}$