

Correction du DS n° 3 des élèves de PTSI : Sujet B *durée 2 heures*

PROBLÈME N°1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Il est clair que, pour n fixé dans $\mathbb{N}$, $\left[f_n : x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ est continue sur $[0, 1]$ de sorte que u_n est correctement défini.

1) Calculer la valeur de u_1 .

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1 \quad \text{Primitive en } u' \times u^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right)' \text{ avec } u(x) = 1+x^2$$

2) On propose ici différentes méthodes pour calculer u_0 .

On rappelle que : $x^0 = 1$ pour $x \in]0, 1]$ avec un prolongement continue de cette égalité pour $x = 0$.

2)a) Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = 1$ En déduire u_0

$$\operatorname{sh} x = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2e^x \Leftrightarrow e^x \text{ est solution de } X^2 - 2X - 1 = 0$$

car $e^x \neq 0$ Le discriminant de $X^2 - 2X - 1$ est $\Delta = 4 + 4 = (2\sqrt{2})^2$

$$\text{donc : } \operatorname{sh} x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0 \text{ impossible ou } e^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow e^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$$

L'équation $\operatorname{sh} x = 1$ possède une unique solution qui est $\operatorname{argsh}(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$

$$\text{Alors : } u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\operatorname{argsh} x]_0^1 = \operatorname{argsh}(1) - \operatorname{argsh}(0) = \ln(1 + \sqrt{2}) - 0 \text{ soit } u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1 + \sqrt{2})$$

2)b) Calculer u_0 en utilisant le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *Indication : Établir que : $1 + x^2 = \frac{1}{1-u^2}$*

On donnera le résultat sous la forme $\ln(p + \sqrt{q})$ où p et q sont deux nombres entiers

Pour $x \in [0, 1]$, comme $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| = x \geq 0$, on a : $0 \leq u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ de sorte que

$$u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow_{u \geq 0} u^2 = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - u^2 \Leftrightarrow_{1-u^2 \neq 0} 1+x^2 = \frac{1}{1-u^2}$$

$$\text{Si on pose : } u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ alors } \begin{cases} du = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} dx = \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ x=0 \Leftrightarrow u=0 \text{ et } x=1 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{alors : } u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \underbrace{\int_0^1 (1+x^2) \times \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}_{\int_{\alpha}^{\beta} e f(\varphi(x)) \times \varphi'(x) dx} = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2}}_{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du}$$

Ici, on a bien : $\left[\varphi : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ où $\left[f : u \mapsto \frac{1}{1-u^2} \right]$ est de classe C^1 .

$$\text{Mais alors : } u_0 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{2} [\ln|1+u| - \ln|1-u|]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{soit : } u_0 = \frac{1}{2} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2-1}\right) \text{ soit } \boxed{u_0 = \ln(1 + \sqrt{2})}$$

On peut aussi utiliser la primitive $\operatorname{argth}'(u) = \frac{1}{1-u^2}$ et expliciter ensuite $\operatorname{argth} \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln(1 + \sqrt{2})$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{1+n}$ En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il est clair que : $\forall x \in [0, 1], \quad 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n \quad \text{car } x^n \geq 0$

Alors : $\begin{cases} \forall x \in [0, 1], & \frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n \\ 0 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx \quad \text{en utilisant la croissance de l'intégrale.}$

Or : $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$ de sorte qu'on a bien obtenu :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{1+n}}$$

Mais : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} = 0$ de sorte que, par encadrement (th des gendarmes) : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

4) Justifier que, pour tout entier naturel n : $u_n + u_{n+2} = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale s'exprime en fonction de u_{n+2} .

En déduire une expression de u_{n+2} en fonction de u_n .

Pour tout entier naturel n , on a, par linéarité de l'intégrale :

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx .$$

On réalise alors une intégration par parties (IPP) avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{1+x^2} & u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} & v'(x) = x^n \end{cases}$ où u, v sont C^1 sur $[0, 1]$.

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \times u_{n+2}$$

$$\text{autrement dit : } (n+1) \times (u_n + u_{n+2}) = \sqrt{2} - u_{n+2} \Leftrightarrow (n+2)u_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)u_n \Leftrightarrow u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2}u_n$$

$$\text{On a donc justifié que : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2}u_n$$

5) Calculer u_3 et u_2 .

$$\text{Pour } n = 1, \text{ on a : } u_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}u_1 = \frac{\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 1)}{3} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Pour } n = 0, \text{ on a : } u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$$

Dans ce problème, f est une fonction à valeurs réelles continue sur l'intervalle réel $I =]0, +\infty[$.

On définit alors une fonction G_f sur I et à valeurs réelles par : $\forall x > 0, \quad G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt$

PARTIE I : Étude du cas général

I-1) Justifier l'existence du réel $G_f(x)$ pour tout réel $x > 0$.

Par hypothèse, pour tout réel $x > 0$, f est continue sur le segment $[x, 3x]$ ($x > 0 \Rightarrow x < 3x$) et t ne s'y annule pas donc $\left[t \mapsto \frac{f(t)}{t}\right]$ est aussi continue sur $[x, 3x]$ de sorte que le réel $G_f(x)$ existe.

I-2) Éventuellement en introduisant une primitive bien choisie, justifier que la fonction G_f est dérivable sur I .

f est continue sur I et $[t \mapsto t]$ est aussi continue sur I et ne s'y annule pas donc, par quotient, la fonction $\left[g : t \mapsto \frac{f(t)}{t}\right]$ est continue sur I aussi elle admet des primitives sur I .

On appelle G la primitive de g sur I qui s'annule en 1. On sait que : $\forall x > 0, \quad G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$

Or : $\forall x > 0, \quad G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^{3x} \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^{3x} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = G(3x) - G(x)$

La fonction G est continue et dérivable sur I . Également, $[x \mapsto 3x]$ est continue et dérivable sur I à valeurs dans I où G est continue et dérivable donc la composée $[x \mapsto G(3x)]$ est continue et dérivable sur I

Aussi, la fonction G_f est définie, continue et dérivable sur I

I-3) Calculer à l'aide de la fonction f la valeur du réel $G'_f(x)$ pour $x \in I$.

$\forall x > 0, \quad G'_f(x) = \left(G(3x) - G(x)\right)' = 3 \times G'(3x) - G'(x) = 3 \times g(3x) - g(x) = 3 \times \frac{f(3x)}{3x} - \frac{f(x)}{x}$

Finalement, on a justifié que : $\forall x > 0, \quad G'_f(x) = \frac{f(3x) - f(x)}{x}$

PARTIE II : Étude de quelques propriétés d'un cas particulier

Dans cette partie, la fonction G_h définie sur I est associée à la fonction h définie sur I par : $\forall x \in I, \quad h(x) = \cos x$.

On a donc : $\forall x \in I, \quad G_h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

II-1) Sans aucun calcul d'intégrale, donner le signe de $G_h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $G_h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$G_h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t} dt$ or $\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{\cos t}{t} \geq 0$ et $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ donc, par positivité de l'intégrale $G_h\left(\frac{\pi}{6}\right) \geq 0$

Et $G_h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{t} dt$ or $\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \frac{\cos t}{t} \leq 0$ et $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$ donc, par positivité de l'intégrale $G_h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$

II-2) Étude de G_h au voisinage de $+\infty$

a) Démontrer que : $\forall x \in I, \quad G_h(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$

On réalise une intégration par parties avec $\forall t \in I, \begin{cases} u(t) = \sin t & \text{alors } u \text{ est } C^1 \text{ sur } I \text{ et } u'(t) = \cos t \\ v(t) = \frac{1}{t} & \text{alors } v \text{ est } C^1 \text{ sur } I \text{ et } v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$

Aussi : $\forall x > 0, \quad G_h(x) = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \sin t \times -\frac{1}{t^2} dt$ soit $\forall x \in I, \quad G_h(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$

b) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$ et en déduire la limite de $G_h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

On a : $\forall x > 0, \quad \left| \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \leq \underbrace{\int_x^{3x} \frac{|\sin t|}{t^2} dt}_{\text{car } x < 3x \text{ si } x > 0} \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt$ mais $\int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{3x} = \frac{2}{3x}$

donc $\forall x > 0, \quad \left| \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \leq \frac{2}{3x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x} = 0$ aussi, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = 0$

Par ailleurs : $\forall x > 0, \quad \left| \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x} \right| \leq \underbrace{\frac{|\sin(3x)|}{3x}}^{\leq 1} + \underbrace{\frac{|\sin(x)|}{x}}^{\leq 1} \leq \frac{4}{3x} \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3x} = 0$
par l'inégalité triangulaire

donc, par encadrement, on a aussi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x} \right) = 0$

Mais : $\forall x > 0, \quad G_h(x) = \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$ donc, par somme : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} G_h(x) = 0}$

II-3) Variations de la fonction G_h

a) Prouver que : $\forall x > 0, \quad G'_h(x) = \frac{-4 \sin^2(x) \cos(x)}{x}$

On peut utiliser le résultat du I-2). On sait que : $\forall x > 0, \quad G'_h(x) = \frac{h(3x) - h(x)}{x} = \frac{\cos(3x) - \cos(x)}{x}$

Or : $\forall x > 0, \quad \cos(3x) - \cos(x) = \cos(2x + x) - \cos(x) = \cos(2x) \cos(x) - \underbrace{\sin(2x)}_{=2 \sin(x) \cos(x)} \sin(x) - \cos x$
 $= \cos(x) \times (\underbrace{\cos(2x) - 1}_{-2 \sin^2(x)} - 2 \sin^2(x))$
 $= -4 \sin^2(x) \cos(x)$

Ainsi, on a justifié que : $\boxed{\forall x > 0, \quad G'_h(x) = \frac{-4 \sin^2(x) \cos(x)}{x}}$

b) En déduire les intervalles réels de $]0, +\infty[$ où G_h est croissante et ceux où G_h est décroissante.

Sur $]0, +\infty[$, le signe de $G'_h(x)$ est donc opposé à celui de $\cos(x)$ puisque $\sin^2(x) \geq 0$ et $x > 0$. Autrement dit :

G_h est décroissante sur les intervalles $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{N}^*$ (c'est à dire lorsque $\cos(x) \geq 0$)

et G_h est croissante sur les intervalles $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{N}$ (c'est à dire lorsque $\cos(x) \leq 0$)

II-4) Étude en 0 : On admet que : $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leq \frac{\cos t}{t} \leq \frac{1}{t} + \frac{t}{2}$

a) En déduire que : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{6}], \quad \ln(3) - 2x^2 \leq G_h(x) \leq \ln 3 + 2x^2$

Si $x \in]0, \frac{\pi}{6}]$ alors $0 < x < 3x \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\forall t \in [x, 3x], \quad \frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leq \frac{\cos t}{t} \leq \frac{1}{t} + \frac{t}{2}$

aussi, si on intègre ces inégalités entre x et $3x$ où $x < 3x$, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{2} \right) dt \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{2} \right) dt \quad \text{soit} \quad \left[\ln t - \frac{t^2}{4} \right]_x^{3x} \leq G_h(x) \leq \left[\ln t + \frac{t^2}{4} \right]_x^{3x}$$

b) Montrer que la fonction G_h est prolongeable par continuité en 0 et déterminer $G_h(0)$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 3 - 2x^2) = \ln 3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 3 + 2x^2)$ alors on a par encadrement $\lim_{x \rightarrow 0^+} G_h(x) = \ln 3$

$\boxed{\text{On peut donc prolonger la fonction } G_h \text{ par continuité en 0 en posant } G_h(0) = \ln 3}$

c) Justifier alors que la fonction G_h ainsi prolongée est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé $G'_h(0)$

Pour justifier la dérivabilité à droite en 0, on cherche la limite en 0^+ de $\frac{G_h(x) - G_h(0)}{x} = \frac{G_h(x) - \ln 3}{x}$

Or : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{6}], \quad \ln(3) - 2x^2 \leq G_h(x) \leq \ln 3 + 2x^2 \Leftrightarrow \forall x \in]0, \frac{\pi}{6}], \quad -2x \leq \frac{G_h(x) - \ln 3}{x} \leq 2x$

Et : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x)$ aussi, par encadrement, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G_h(x) - \ln 3}{x} = 0$

$\boxed{\text{La fonction } G_h \text{ prolongée par continuité en 0 par } G_h(0) = \ln 3 \text{ est donc dérivable à droite en 0 et } G'_h(0) = 0}$