Devoir Surveillé n^0 3 : sujet A

Exercice n°1 *Résolution d'une équation différentielle du second ordre* *Durée 25 minutes*

1) Établir, lorsque c'est possible (à préciser), que $e^{\operatorname{argsh} x} = \sqrt{1+x^2}+x$

2) Résoudre alors sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $(x^2+1)y''+xy'-4y=0$ en posant $x=\operatorname{sh} t$.

Exercice n°2 *Durée 20 minutes* Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) $\arcsin(2x)+\arccos(2x-1)=\pi$

Exercice n°3 *Détermination d'un réel* *Durée 20 minutes*

1) Si $a=\arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$ donner la valeur exacte de $\cos a$ et de $\sin(a)$ puis celle de $\sin(3a)$

2) En déduire la valeur exacte de a. *On donne* $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\simeq 0.97$

Exercice n°4 *Un changement de variable* *Durée 15 minutes*

On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. En posant $x=\dfrac{1}{t}$, calculer la valeur de I.

Exercice n°5 *Étude d'une fonction* *Durée 40 minutes*

Soit $f(x)=\arccos(\operatorname{th} x)+\arctan(\operatorname{sh} x)$, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f. f est-elle impaire ? (Justifier)

Établir (sans utiliser de dérivation) que : $\forall x\in D_f,\quad f(x)+f(-x)=\pi$ Que peut-on conclure pour $\mathcal{C}$?

2) Justifier la dérivabilité de f sur D_f et déterminer le nombre dérivée $f'(x)$. Que peut-on conclure ?

3) On se propose de démontrer de deux façons l'égalité : $\arccos\dfrac{5}{13}+\arctan\dfrac{5}{12}=\dfrac{\pi}{2}\quad(*)$

Dans la suite, on définit le réel θ par : $\theta=\operatorname{argth}\dfrac{5}{13}$.

Montrer que $\theta=\ln 3-\ln 2$ et calculer $\operatorname{sh}(\theta)$. En déduire l'égalité $(*)$.