

DEVOIR SURVEILLÉ n° 3 : SUJET B**PROBLÈME N°1**

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Il est clair que, pour n fixé dans $\mathbb{N}$, $\left[f_n : x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ est continue sur $[0, 1]$ de sorte que u_n est correctement défini.

1) Calculer la valeur de u_1 .

2) On propose ici différentes méthodes pour calculer u_0 .

On rappelle que : $x^0 = 1$ pour $x \in]0, 1]$ avec un prolongement continu de cette égalité pour $x = 0$.

2)a) Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = 1$ En déduire u_0 .

2)b) Calculer u_0 en utilisant le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *Indication : Établir que : $1+x^2 = \frac{1}{1-u^2}$*

On donnera le résultat sous la forme $\ln(p + \sqrt{q})$ où p et q sont deux nombres entiers

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{1+n}$ En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) Justifier que, pour tout entier naturel n : $u_n + u_{n+2} = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale s'exprime en fonction de u_{n+2} .

En déduire une expression de u_{n+2} en fonction de u_n .

5) Calculer u_3 et u_2 .

PROBLÈME N°2

Dans ce problème, f est une fonction à valeurs réelles continue sur l'intervalle réel $I =]0, +\infty[$.

On définit alors une fonction G_f sur I et à valeurs réelles par : $\forall x > 0, \quad G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt$

PARTIE I : Étude du cas général

I-1) Justifier l'existence du réel $G_f(x)$ pour tout réel $x > 0$.

I-2) Éventuellement en introduisant une primitive bien choisie, justifier que la fonction G_f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

I-3) Calculer à l'aide de la fonction f la valeur du réel $G'_f(x)$ pour $x \in I$.

PARTIE II : Étude de quelques propriétés d'un cas particulier

Dans cette partie, la fonction G_h définie sur I est associée à la fonction h définie sur I par : $\forall x \in I, \quad h(x) = \cos x$.

On a donc : $\forall x \in I, \quad G_h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

II-1) Sans aucun calcul d'intégrale, donner le signe de $G_h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $G_h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

II-2) Étude de G_h au voisinage de $+\infty$

a) Démontrer que : $\forall x \in I, \quad G_h(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$

b) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$ et en déduire la limite de $G_h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

II-3) Variations de la fonction G_h

a) Prouver que : $\forall x > 0, \quad G'_h(x) = \frac{-4 \sin^2(x) \cos(x)}{x}$

b) En déduire les intervalles réels de $]0, +\infty[$ où G_h est croissante et ceux où G_h est décroissante.

On abordera cette dernière question que si tout le reste a été traité.

II-4) Étude en 0 : On admet que : $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leq \frac{\cos t}{t} \leq \frac{1}{t} + \frac{t}{2}$

a) En déduire que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right], \quad \ln(3) - 2x^2 \leq G_h(x) \leq \ln 3 + 2x^2$

b) Montrer que la fonction G_h est prolongeable par continuité en 0 et déterminer $G_h(0)$

c) Justifier alors que la fonction G_h ainsi prolongée est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé $G'_h(0)$.