Exercices d'applications directes

EXERCICE A-1 La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est 2 périodique. Son expression sur $]0,1]$ est $f(x) = 1 - x$.

- Tracer la courbe représentant f dans un repère orthonormal si on suppose f continue et paire.
- Tracer la courbe représentant f dans un repère orthonormal si on suppose f impaire.

EXERCICE A-2 Proposer un domaine d'étude pour la fonction $f(t) = \dfrac{1}{\cos(t) + \cos(2t)}$

EXERCICE A-3 Préciser le domaine de définition de $\left[f : (x, y, z) \mapsto x^2 e^{yz} + e^{y \ln x}\right]$
puis calculer les dérivées partielles premières et secondes de f lorsque c'est possible.

EXERCICE A-4 Étudier la continuité et préciser le sens de variation de f donnée par $f(x) = \tan\left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right)$
(On évitera les calculs inutiles de dérivées)

EXERCICE A-5 Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions f et g données par les expressions

$$f(x) = x^2 \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

Prolonger ces fonctions en 0. Préciser la tangente en 0 si elle existe.

EXERCICE A-6
A) Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :
1) $\sqrt{1+x}$ 2) $\sin x - \tan x$ 3) $\ln\left(1 - x^2\right)$ 4) $e^{2x} - 2e^x$ 5) $\sin(x)\ln(1+x)$ 6) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$ 7) $\cos(x)\sin(x)$

B) Déterminer les limites suivantes : 1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ 2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^3}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4}$

EXERCICE A-7 Justifier que la fonction $\left[f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}\right]$ est prolongeable par continuité en 0. Préciser $f(0)$.
Ce prolongement est-il dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.

EXERCICE A-8 Préciser le comportement asymptotique des fonctions suivantes en $+\infty$:
$f(x) = x + \ln x$, $g(x) = x + \sin x$, et $h(x) = \ln(e^x + 1)$

Exercices de référence

EXERCICE R-1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ b) $\sin 2x + \cos 2x > 0$ c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\cos(3x)$ d) $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 \geq 0$

EXERCICE R-2 x est un nombre réel. Lorsque cela est possible (à préciser), on pose $t = \tan \dfrac{x}{2}$.
Démontrer alors que $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

EXERCICE R-3 Soit la fonction f donnée par : $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$

1) Sans aucun calcul de dérivée, dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Étudier l'existence de demi-tangentes au(x) point(s) d'abscisse 1.
2) *Définition : Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, la courbe représentative de f admet le point $\Omega(a, b)$ comme centre de symétrie si* $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ 2a - x \in \mathcal{D}_f$ *et* $f(2a - x) + f(x) = 2b$
Illustrer cette définition par un schéma. Calculer $f(2 - x) + f(x)$ Conclure.
3) On revient au cas où f est une fonction réelle quelconque définie sur $\mathcal{D}_f$.
Que doit-on vérifier pour justifier que la courbe représentative de f possède la droite $x = a$ pour axe de symétrie ?

EXERCICE R-4 Étudier le comportement asymptotique de $f(x) = \sqrt{1 + x^2\left(\dfrac{2 - x^2}{1 - x^2}\right)^2}$ en 1 et en $+\infty$

Exercice R-5 *Exemples concrets en physique*

1) L'indice de réfraction d'un prisme n dépend de la longueur d'onde λ selon la loi $n = a + \dfrac{b}{\lambda^2}$
où a et b sont des constantes avec $b > 0$ Retrouver que l'indice du prisme diminue lorsque λ augmente.
2) Pour mesurer la hauteur d'une tour, le géométre se place à 60 mètres de celles-ci et mesure un angle de $\alpha = 45°$
En considérant qu'il peut commettre une erreur de 10 cm sur sa mesure au sol et une erreur de $1'$ d'arc sur l'angle, proposer un encadrement de la hauteur h de la tour.
3) En mécanique relativiste, l'énergie E d'une particule est liée à sa vitesse v et à sa masse m selon la loi

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{où } c \text{ est la vitesse de la lumière}$$

En mécanique newtonnienne, la vitesse v de la particule est trés négligeable devant c
(Le physicien notera $v << c$ ou $\frac{v}{c} << 1$ ce que le mathématicien traduira par $\frac{v}{c} \to 0$...)
Retrouver alors la formule donnant l'énergie cinétique en mécanique newtonnienne.

Exercices d'entraînement

Exercice E-1 On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

1) *Une première méthode* : En admettant que $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, résoudre l' équation (E) en utilisant la méthode de Fresnel.

2) *Une deuxième méthode* : Résoudre l'équation (E) après avoir utilisé (et justifié) le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ *On rappelle que* $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Exercice E-2 Étudier la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\sqrt{\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|}\right)$

Exercice E-3 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Étudier la continuité de la fonction f.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ?
2) Pour $x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, calculer $\ln|f(x)|$ et justifier l'existence de $f'(x)$.
En déduire alors le signe $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ puis préciser le sens de variation de f.
3) Étudier la dérivabilité de f en 1 et la dérivabilité à gauche en 0.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
4) Étudier le comportement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5) Récapituler l'ensemble des résultats dans un tableau de variation et représenter f graphiquement.