Exercices d'applications

<u>EXERCICE A-1</u> On définit sur l'ensemble $E = [-1, 1]$ la loi $\left[* : (a, b) \mapsto ab\right]$ Étudier ses propriétés.

Est-ce une loi interne ? Est-elle associative ? commutative ? A-t-elle un élément neutre ? Quels sont les éléments inversibles ?

<u>EXERCICE A-2</u> Démontrer que :

- Si $n \in \mathbb{Z}$ est fixé, alors $n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

- $(\mathbb{U}, \times)$ et $(\mathbb{U}_n, \times)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Que dire de $\mathbb{U}_n$ par rapport à $\mathbb{U}$?
  où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^{ieme} de l'unité.

<u>EXERCICE A-3</u> Dans chacun des cas suivants, G munit de la loi $*$ est-il un groupe ?

1) $G = \mathbb{Z}$ et $a * b = a - b$ 2) $G = \mathbb{Z}_+^*$ et $a * b = \frac{a}{b}$ 3) $G = \mathbb{Q}_+^*$ et $a * b = \frac{a}{b}$ 4) $G = \{a, b, c\}$ et

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

<u>EXERCICE A-4</u> Dans chacun des cas suivants, l'ensemble E est-il un $\mathbb{K}$ev pour les lois proposées ?

1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la loi $+$ est la loi usuelle, la loi $\mathbb{R}.$ est donnée par $\alpha.(x, y) = (\alpha y, \alpha x)$
2) E est un $\mathbb{R}$ev, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la loi $+$ est celle du $\mathbb{R}$ev E, la loi $\mathbb{C}.$ est donnée par
$$(a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx) \qquad (\text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

<u>EXERCICE A-5</u> Les ensembles suivants sont-il des $\mathbb{R}$ev pour les lois usuelles ?

1) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; 2x + 3y = 0\}$
2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; x + y = 1\}$
3) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; xy \geq 0\}$
4) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u1 = 0\}$
5) L'ensemble E des fonctions réelles s'annulant en 0
6) $E = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \Re e(z) = x\}$
7) L'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
8) L'ensemble E des suites arithmétiques

<u>EXERCICE A-6</u> On donne $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x = z\}$, $G = \{(2t + s, -t, 2t) \bigm| (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$
$S_1 = \{(0, 0, a) \bigm| a \in \mathbb{R}\}$ et $S_2 = \{(a, 0, 0) \bigm| a \in \mathbb{R}\}$

1) Justifier que F, G, S_1 et S_2 sont des sev de $\mathbb{R}^3$. A-t-on $S_1 \subset G$? A-t-on $S_2 \subset G$?
2) Prouver que $\mathbb{R}^3 = F + S_1 = F + S_2 = F + G$
3) Montrer que $(1, 1, 1)$ possède au moins 2 décompositions différentes dans la somme $\mathbb{R}^3 = F + G$? Qu'en déduire ?
4) Prouver que S_1 et S_2 sont des supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$ et que S_1 est aussi un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$

<u>EXERCICE A-7</u> Dans l'espace vectoriel réel $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on considère
$$F = \left\{ f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \Bigm| \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$$ et G l'ensemble des fonctions de E qui sont constantes sur $[0, 1]$

Prouver que F et G sont supplémentaires dans E

Exercices de référence

Exercice R-1 *Différence symétrique*

Si E est un ensemble quelconque, alors pour toutes parties F et G de E,
on définit la différence symétrique de F et G notée $F\triangle G$ par : $F\triangle G = \big(F-G\big)\cup\big(G-F\big)$

1) a) Faire un dessin "patate" pour identifier $F\triangle G$
b) Si $E=\mathbb{R}$, que vaut $\mathbb{R}_+\triangle\mathbb{R}_-$?
2) On revient au cas général. $\triangle$ définit une loi sur $\mathcal{P}(E)$
a) Montrer que $\triangle$ est commutative.
b) Pour toute partie F de E, calculer $F\triangle\emptyset$. Que peut-on en conclure pour $\triangle$?
c) Montrer que F est son propre symétrique pour $\triangle$.
3) On rappelle que : $\forall(F,G)\in\mathcal{P}(E)^2,\quad F-G=F\cap\overline{G}$ et que $\overline{\overline{F}}=F$
a) Montrer que $\forall(F,G)\in\mathcal{P}(E)^2,\quad \overline{F\triangle G}=\big(F\cap G\big)\cup\big(\overline{F}\cap\overline{G}\big)$
b) Justifier alors que, pour toutes parties F, G et H de E :

$$\big(F\triangle G\big)\triangle H=\big(F\cap\overline{G}\cap\overline{H}\big)\cup\big(\overline{F}\cap G\cap\overline{H}\big)\cup\big(\overline{F}\cap\overline{G}\cap H\big)\cup\big(F\cap G\cap H\big)$$

c) En déduire que la loi $\triangle$ est associative.
4) Qu'a-t-on finalement démontré dans cet exercice ?

Exercice R-2 Soit E un $\mathbb{K}$ev et F et G des sev de E, démontrer que :

$$F\cup G \text{ est un sev de } E \quad\Leftrightarrow\quad F\subset G \text{ ou } G\subset F$$

Exercice R-3 On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et, pour $a\in\mathbb{R}$, on note :

$$E(a)=\{P\in\mathbb{R}[X],\big|\ X-a \text{ divise } P\}=\{P\in\mathbb{R}[X],\big|\ \exists Q\in\mathbb{R}[X],\ P=(X-a)\times Q\}$$

Les polynômes réels à une indéterminée X sont des objets mathématiques qu'on étudiera plus tard dans l'année.
Un polynôme réel générique P s'écrit $P=a_0+a_1X+\dots a_nX^n$ où $n\in\mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$
Les définitions de degré, de coefficients dominants et les régles de calculs (somme, produit, dérivation) sont intuitives
et sont analogues à celles des expressions polynômiales $p(x)$ d'une fonction polynômiale où on note P au lieu de $p(x)$.

Exemples : *Si* $P=1-X+2X^5$ *et* $Q=X-3X^5+X^2$ *alors*
P est de degré . Le monôme de degré 1 de P est et il a pour coefficient . Le terme de degré 2 est
Q est de degré et son coefficient dominant est et son coefficient constant est . Celui de P est
$2P=$ $\qquad$ $P+Q=$
$PQ=$
Le polynôme dérivé de P est $P'=$ $\qquad$ *Celui de Q est* $Q'=$

$\mathbb{R}[X]$ munit des lois $+$ et $\mathbb{R}.$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel
Le vecteur nul de $\mathbb{R}[X]$ est un polynôme, noté $0_{\mathbb{R}[X]}$ dont tous les coefficients sont nul
de sorte que le polynôme opposé $-P$ est le symétrique du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$

1) Prouver que $E(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
2) Si a et b sont des réels distincts, trouver des réels c et d tels que $c(X-a)+d(X-b)=1$
3) Démontrer alors que $\mathbb{R}[X]=E(a)+E(b)$
4) Les sous-espaces vectoriels $E(a)$ et $E(b)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice R-4 P est l'ensemble des suites réelles dont les termes impaires sont nuls
et I est l'ensemble des suites réelles dont les termes pairs sont nuls.
Démontrer que P et I sont des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.