Exercices d'applications

EXERCICE A-1 Résoudre sur I les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 2xy = b(x)$ où $I = \mathbb{R}$ pour

a) $b(x) = 4x$ b) $b(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x}$ c) $b(x) = -2x + 3(2x+1)e^{-x}$

2) $t^2 y' + ty = \gamma(t)$ pour : a) $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ b) $I = \mathbb{R}$
pour les second membres $\gamma(t) = t^4 + t^2$ puis $\gamma(t) = 1 + t^2$

EXERCICE A-2 Soit l'équation $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1 \qquad (E)$,

1) Déterminer une solution polynômiale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation (E) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.
3) Déterminer alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
4) Préciser la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ que détermine la condition initiale $y(1) = 1$.

Exercices de référence

EXERCICE R-1 Résoudre sur I l'équation

1) $y' - 2y = \sin(2x)$ et $I = \mathbb{R}$

2) $(1+2x)y' + 2xy = 6x^2 + 8x + 3$ et $I = \mathbb{R}_+^*$

3) $(1+x^2)^2 y' + 2xy = x(1+x^2)e^{\frac{1}{1+x^2}}$ et $I = \mathbb{R}$

4) $\cos^2(x)y' - y = \sin(2x)e^{\tan x}$ et $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

5) $x^2 y' - y = (x^2 - 1)e^x$ et $I = \mathbb{R}$

EXERCICE R-2 Trouver toute les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle
$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2, \quad f(t+u) = f(t)f(u)$$

Exercices d'entraînement

EXERCICE E-1 *Recollement de solutions*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(1-x)y' - y = x$

2) $x^3 \ln|x| y' - x^2 y = 2x \ln^2|x|$
(On considère que $[x \mapsto x^3 \ln|x|]$ et $[x \mapsto 2x \ln^2|x|]$ sont continues sur $\mathbb{R}$ prolongées par 0 en 0.)
Quelles sont les solutions sur $]0, +\infty[$ de cette équation ?

3) $\begin{cases} y' \cos x + 2y \sin x = 1 + \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (Rechercher une solution particulière évidente)