Exercices d'applications

EXERCICE A-1 Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}, \qquad z_2 = 1 + i\tan\left(\frac{\pi}{8}\right), \qquad \text{et} \qquad z_3 = 1 + i + i^2 + \cdots + i^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

EXERCICE A-2 Déterminer la forme algébrique de $\left(-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2007}$ *ou bien* 2008 *ou bien* 2009...

EXERCICE A-3 a) Linéariser $\cos x \sin^2 x$ en déduire la linéarisation de $\sin^3(x)$.

b)Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\mathrm{d}x$ c) Linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$

d) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \cos^4 x$.

EXERCICE A-7/2 Donner le module et un argument de $\dfrac{1+e^{ix}}{1-i}$ où x est un réel quelconque.

EXERCICE A-4 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin kx$

EXERCICE A-5 Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de $[x \mapsto e^{2x}\sin(x)]$

EXERCICE A-6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -2$

EXERCICE A-7 1) Résoudre l'équation différentielle de la variable réelle t donnée par $2i\, y' + y = 4it$

2) Résoudre l'équation différentielle de la variable réelle t donnée par $z' - 2z = e^{2it}$

En déduire les solutions réelles de l'équation différentielle $y' - 2y = \sin(2t)$

3) Résoudre l'équation différentielle de la variable réelle t donnée par $y' + i\, y = e^{-it}$

En déduire la solution du système différentiel $\begin{cases} x' - y = \cos(t) \\ y' + x = -\sin(t) \end{cases}$

EXERCICE A-8 Déterminer les racines carrées de : a) $1-i$ puis en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

b) $3-2i$

EXERCICE A-9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$ puis $z^2 + 2(1-i)z - 5(1-2i) = 0$

puis l'équation $z^3 + (2+i)z^2 - 3(1+4i)z + 5(i-2) = 0$

EXERCICE A-10 On note $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les n racines n^{ieme} de l'unité.

Proposer trois méthodes (enfin deux et demi) pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k$

EXERCICE A-11 On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Exprimer $1 + u + u^2 + u^3 + u^4$ à l'aide de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Construire alors un pentagone régulier uniquement à la régle et au compas.(On pensera à utiliser le théorème de Pythagore)

EXERCICE A-12 Déterminer les racines cinquièmes de $-i$.

Exercices de référence

EXERCICE R-1 Déterminer le nombre complexe $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

EXERCICE R-2 Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, exprimer $\dfrac{\sin 6x}{\sin x}$ uniquement en fonction de $\cos x$

EXERCICE R-3 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer les sommes $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$

EXERCICE R-4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$ **b)** $z^4 - 8(1+i)z^2 + 63 + 16i = 0$ $(63^2 + 16^2 = 65^2)$ **c)** $e^z + e^{-z} = \dfrac{3}{2}i$

EXERCICE R-5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : a) $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$ b) $z^6 + z^3(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$

EXERCICE R-6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n - (z-i)^{2n} = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

On donnera les solutions sous forme algébrique.