Exercices d'applications

<u>EXERCICE A-1</u> Résoudre $y'' - (1+i)y' + 2(1+i)y = 0$

<u>EXERCICE A-2</u> Trouver les solutions complexes, puis les solutions réelles, de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = C \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ est fixé}$$

<u>EXERCICE A-3</u> Justifier les différents cas et la forme des solutions pour le circuit RLC en physique

On rappelle que u est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} u'' + 2\lambda u' + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$ où $\lambda = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

<u>EXERCICE A-4</u> Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 7e^{-x} + 4e^{x}$$

<u>EXERCICE A-5</u> Sachant que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, calculer (rapidement) les dérivées premières et secondes de y si :

a) $y(t) = (\alpha t^3 + \beta t^2)e^{-t}$ *b)* $y(t) = (\alpha t^3 + \beta t)e^{2t}$

Exercices de référence

<u>EXERCICE R-1</u> Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = te^t$ 2) $y'' + 2y' + y = 1 + e^t$ 3) $y'' + y = te^t$ 4) $y'' + y = t\cos t$

<u>EXERCICE R-2</u> Déterminer l'unique solution réelle des problèmes suivants :

1) $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{x}{2}}$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ 2) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

3) $y'' - 2y' + 2y = \sin^3(x)$ et $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Exercices d'entraînement

<u>EXERCICE E-1</u> *Une équation différentielle à paramètre*

a est un paramètre réel. On considère l'équation différentielle (E_a) : $y'' - (1+a)y' + ay = e^{a^2 x}$

Déterminer suivant les valeurs du paramètre a l'ensemble $\mathcal{S}_a$ des fonctions réelles solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_a).

On pourra traiter aussi les cas : (E_a^1) : $y'' - (1+a)y' + ay = e^{ax}$ *et* (E_a^2) : $y'' - (1+a)y' + ay = e^{2ax}$

<u>EXERCICE E-2</u> *Résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants par changement de fonction inconnue*

Soit l'équation différentielle (E) $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$,

1) On pose $z(x) = xy(x)$. Montrer que y est une solution de (E) sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E') linéaire à coefficients constants que l'on déterminera.
2) Résoudre (E') puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3) Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

<u>EXERCICE E-3</u> *Résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants par changement de variable*

Soit l'équation différentielle (E) $x^2y'' - xy' + y = 0$,

1) On pose $z(t) = y(e^t)$. Montrer que y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire (E') à coefficients constants que l'on déterminera.
2) Résoudre (E') puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) En adaptant la méthode ci-dessus, résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
3) Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

<u>EXERCICE E-4</u> *Résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants par changement de fonction inconnue*

Soit l'équation différentielle (E) $xy'' + (3x+2)y' + 3(x+1)y = 0$,

1) On pose $z(x) = xe^x y(x)$. Montrer que y est une solution de (E) sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E') linéaire à coefficients constants que l'on déterminera.
2) Résoudre (E') puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3) Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$?