

Exercices d'applications

EXERCICE A-1 Donner le tableau de variation de la fonction $\left[f : x \mapsto \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \right]$
En déduire les solutions réelles de l'équation $3^x + 4^x = 5^x$

EXERCICE A-2 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $3^{2x} - 34 \times 15^{x-1} + 5^{2x} = 0$

EXERCICE A-3 Donner les solutions du système $(S) \begin{cases} 2 \log_x(y) + 2 \log_y(x) = -5 \\ xy = e \end{cases}$

EXERCICE A-13/4 Résoudre $\operatorname{ch}x = 2$

EXERCICE A-14/4 Résoudre $(\operatorname{ch}x)y' - (\operatorname{sh}x)y = \operatorname{sh}^3x$ EXERCICE A-15/4 Primitive de f où $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^3x}$

EXERCICE A-4 Valeurs exactes de $\arccos(\cos 4\pi)$, $\arcsin\left(\cos \frac{5\pi}{6}\right)$, $\arctan \sqrt{3}$, $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ et $\cos(2 \arctan \sqrt{2})$

EXERCICE A-5 Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$ et $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

EXERCICE A-6 Résoudre $\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{sh}(x) = 3$ puis déterminer les réels $\operatorname{argsh}(2)$ et $\operatorname{argth}\left(\frac{1}{3}\right)$

EXERCICE A-7 Déterminer la limite en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{ch}x + 1}{\operatorname{ch}^2x + \operatorname{ch}x + 1}\right)^{\frac{1}{x}}$

EXERCICE A-8 1) Démontrer de deux façons différentes que $\forall x \in]-1; 1[$, $\operatorname{argth}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
2) Soit I l'un des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $]1, +\infty[$, expliciter une primitive de $\left[f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \right]$

Exercices de référence

EXERCICE R-1 Prouver que $\left[f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2} \right]$ est une bijection de $] -1, 1[$ dans un intervalle J à préciser
Déterminer la réciproque f^{-1} de l'application f .

EXERCICE R-2 Démontrer que : $\forall x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$

EXERCICE R-3 Étudier et représenter graphiquement les applications suivantes :

a) $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$ b) $f(x) = x \arctan x$ c) $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}x) - x$

EXERCICE R-4 Simplifier les expressions : $\tan(\arcsin x)$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

EXERCICE R-5 Montrer que : $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE R-6 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : a) $\arccos x = \arcsin(2x)$ b) $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE R-7 Simplifier : a) $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ b) $\operatorname{argth}\left(\frac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}\right)$

EXERCICE R-8 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(1+x^2)y' + xy = b(x)$ (E).

1) Donner les solutions homogènes de cette équation sur \mathbb{R} .

2) Résoudre (E) sur \mathbb{R} lorsque $b(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3) Résoudre (E) sur \mathbb{R} lorsque $b(x) = 1$

4) Résoudre (E) sur I où I est l'un des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $]1, +\infty[$ lorsque $b(x) = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$

Existe-t-il une fonction f continue sur \mathbb{R} et solution de (E) sur chacun de ces intervalles ?